Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 1 10. April 2018

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdots 4^n = 2^{n(n+1)}$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2n)^2 = -n(2n+1)$

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n$

Lösungsskizze zu Aufgabe 1:

(a) *Induktionsbeweis:* Die Aussage $4^1 = 2^{1 \cdot 2}$ stimmt für $n = 1$. Gilt die Aussage für $n-1$, dann folgt

$$4^1 \cdot 4^2 \cdots 4^n = 2^{(n-1)n} \cdot 4^n = 2^{(n-1)n+2n} = 2^{n(n+1)}.$$

Alternativer Beweis mit Gaußscher Summenformel:

$$4^1 \cdot 4^2 \cdots 4^n = 4^{1+2+\ldots+n} = 4^{n(n+1)/2} = 2^{n(n+1)}.$$

(b) *Induktionsbeweis:* Die Aussage $1^2 - 2^2 = -1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$ stimmt für $n = 1$. Gilt die Aussage für $n-1$, dann folgt

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2n)^2 &= -(n-1)(2(n-1)+1) + (2n-1)^2 - (2n)^2 \\ &= -(n-1)(2n-1) + ((2n)^2 - 2(2n) + 1) - (2n)^2 \\ &= -2n^2 - n \\ &= -n(2n+1). \end{aligned}$$

(c) *Beweis mit binomischem Lehrsatz:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (1-2)^n = (-1)^n.$$

Alternativer Beweis durch Induktion: Für $n = 1$ stimmt die Aussage

$$(-2)^0 \binom{1}{0} + (-2)^1 \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = (-1)^1.$$

Gelte die Aussage für $n-1$. Mit der rekursiven Formel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ aus dem Pascalschen Dreieck folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n-1}{k} \\
&= (-2) \sum_{k=0}^{n} (-2)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} (-2)^k.
\end{aligned}$$

In der ersten Summe ersetzen wir $k \to k+1$, wodurch sich der Summationsbereich zu $k = -1, \ldots, n-1$ ändert. Der erste Summand liefert wegen $\binom{n-1}{-1} = 0$ keinen Beitrag, somit gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k \binom{n-1}{k} = (-1)^{n-1}$$

nach Induktionsvoraussetzung. In der zweiten Summe liefert der letzte Summand wegen $\binom{n-1}{n} = 0$ keinen Beitrag, somit gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k \binom{n-1}{k} = (-1)^{n-1},$$

wiederum nach Induktionsvoraussetzung. Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-2) \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} = ((-2)+1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Polynome $q(X)$ und $r(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ mit $\operatorname{grad} r(X) < 2$, so dass

$$X^4 + 4X^3 - 14X^2 + X + 11 = (X^2 - 3X + 2)q(x) + r(X).$$

(b) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ das Polynom $f(X) = X^3 - 8X^2 + 5X + 50$. Es gilt $f(-2) = 0$. Schreiben Sie $f(X)$ als Produkt von Polynomen vom Grad 1.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2:

(a) Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl}
X^4 + 4X^3 & -14X^2 & +X & +11 & = \left(X^2 - 3X + 2\right)\left(X^2 + 7X + 5\right) + 2X + 1 \\
-X^4 + 3X^3 & -2X^2 & & & \\
\hline
7X^3 & -16X^2 & +X & & \\
-7X^3 & +21X^2 & -14X & & \\
\hline
& 5X^2 & -13X & +11 & \\
& -5X^2 & +15X & -10 & \\
\hline
& & 2X & +1 &
\end{array}$$

(b) Da -2 eine Nullstelle ist, ist $f(X)$ durch $X+2$ teilbar. Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -8X^2 & +5X & +50 & = \big(X+2\big)\big(X^2-10X+25\big) \\
-X^3 & -2X^2 & & & \\
\hline
& -10X^2 & +5X & & \\
& 10X^2 & +20X & & \\
\hline
& & 25X & +50 & \\
& & -25X & -50 & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

Mit der binomischen Formel gilt $X^2 - 10X + 25 = (X-5)^2$, somit

$$f(X) = (X+2)(X-5)^2.$$

Aufgabe 3. (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Primzahlen p mit $p \equiv 4 \bmod 6$.

(b) Ist die 100-stellige Zahl $200\ldots018$ eine Quadratzahl?

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $4^n - 1$ eine Primzahl?
(Hinweis: Geometrische Summenformel)

Lösungsskizze zu Aufgabe 3:

(a) Die Bedingung $p \equiv 4 \bmod 6$ bedeutet $p = 6n+4$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Aus $p = 2\cdot(3n+2)$ folgt, dass p gerade ist. Die einzige gerade Primzahl ist $p = 2$, aber es gilt $2 \not\equiv 4 \bmod 6$. Also gibt es keine Primzahl $p \equiv 4 \bmod 6$.

(b) Es gilt $200\ldots018 = 2\cdot 100\ldots009$ und der zweite Faktor ist ungerade, somit ist der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung gleich 1. Eine Quadratzahl hat aber die Form $(p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r})^2 = p_1^{2a_1}\cdots p_r^{2a_r}$, wo alle Exponenten gerade sind. Also handelt es sich nicht um eine Quadratzahl.

(c) Mit der geometrischen Summenformel gilt $4^n - 1 = (4-1)\cdot(1+4^1+4^2+\ldots 4^{n-1})$, daher ist 4^n-1 durch 3 teilbar. Wenn $p = 4^n - 1$ eine Primzahl ist, muss $p = 3$ und somit $n = 1$ gelten. Also ist $4^n - 1$ genau dann eine Primzahl, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen unendlich ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), wenn für alle $S \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > S$ für alle $n \geq N$ gilt.

Zeigen Sie: Sind alle $a_n > 0$, so konvergiert (a_n) genau dann gegen unendlich, wenn die Folge $(1/a_n)$ eine Nullfolge ist. Zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist, wenn man die Bedingung $a_n > 0$ durch $a_n \neq 0$ ersetzt.

Lösungsskizze zu Aufgabe 4:

Seien alle $a_n > 0$ und gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Um zu zeigen, dass $(1/a_n)$ eine Nullfolge ist, sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $S = 1/\varepsilon$ und finden ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 1/\varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann gilt $|1/a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

Für die Umkehrung sei $(1/a_n)$ eine Nullfolge (und weiterhin alle $a_n > 0$). Sei $S \in \mathbb{R}$, gegeben, ohne Einschränkung gelte $S > 0$. Mit $\varepsilon = 1/S$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $1/a_n < 1/S$ für $n \geq N$ gilt, was äquivalent zu $a_n > S$ ist.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, -2, -3, \ldots)$ konvergiert nicht gegen unendlich, da $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und somit für $S = 0$ kein N wie oben existiert. Aber $(1/a_n) = (-1/n)$ ist eine Nullfolge.

Bonusaufgabe.

(1) Wenn Anna neben Eva sitzt, ist Eva glücklich.

(2) Wenn Ben glücklich ist, ist Eva unglücklich.

Anna sitzt neben Eva. Ist Ben glücklich?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **17. April 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
