Algebraische Zahlentheorie

Blatt 2 — 28.04.2018

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie den Ganzheitsring und die Diskriminante von $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{-3})$.

Tipp: Eine legale Lösung der Aufgabe besteht darin, daß Sie SAGE beibringen, Ihnen die Lösung zu verraten.

Aufgabe 7.

Sei ζ_5 eine primitive fünfte Einheitswurzel, also mit Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1,$$

und $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ galoissch vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist.
Tipp: Berechnen sie die Diskriminante. Verwenden Sie eine möglichst schöne $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ bezüglich derer die Operation der Galoisgruppe möglichst einfach wird. Nutzen Sie, daß für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$ und $z \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ gilt z ist ganz $\iff$ $\sigma(z)$ ist ganz. Außerdem verwenden Sie z ganz $\iff$ $\zeta_5 z$ ganz.

Aufgabe 8. (Stickelberger Diskriminantensatz)

Zeigen Sie, daß die Diskriminante Δ_F eines Zahlkörpers F kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 ist.

Tipp: Die Diskriminante hat mit der Determinante der Matrix $C = (\sigma(\alpha_i))$ zu tun, worin $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$ ist und $\sigma : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ über die Einbettungen in den algebraischen Abschluß läuft. Man sortiere in der Leibnitz-Formel für $\det(C)$ die Terme zu geraden Permutationen zu G und zu den ungeraden Permutationen zu U, also $\det(C) = G - U$. Die Galoisgruppe einer Galoisschen Hülle $\tilde{F}/\mathbb{Q}$ von F vertauscht nur Spalten von C. Analysieren Sie, wie diese Galoisgruppe auf G und U wirkt.

Aufgabe 9. (Spurform)

Es sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und $\mathrm{tr}_{L/K}$ die Spurform $L \times L \to K$.

(a) Sei $L = K(\alpha)$ von einem Element α mit Minimalpolynom $f \in K[X]$ erzeugt. Bestimmen Sie $\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i/f'(\alpha)\big)$ für $0 \leq i < \deg(f)$.

Tipp: Partialbruchzerlegung von $1/f(X)$, Substitution $Y = 1/X$ und Potenzreihenentwicklung in $Y = 0$.

(b) Zu f und α aus (a) sei $\sum_{i=0}^{\deg(f)-1} \beta_i X^i$ das Polynom $\frac{f(X)}{X-\alpha} \in L[X]$.

Zeigen Sie, daß $\beta_i / f'(\alpha)$ mit $0 \leq i < \deg(f)$ die Dualbasis von $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg(f)-1}$ bezüglich der Spurform ist.

Tipp: Definieren Sie die (koeffizientenweise) Spur eines Polynoms aus $L[X]$ und berechnen Sie

$$\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i / f'(\alpha) \cdot \sum_j \beta_j X^j\big).$$

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 03.05.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---

28. April 2018