Syllabus für Elementarmathematik 2

Goethe–Universität Frankfurt — Sommersemester 2018

für L2 und L5

JAKOB STIX

Dies ist eine Übersicht über den Lehrstoff der Vorlesung *Elementarmathematik 2*, welche den (geplanten) Verlauf der Vorlesung im Sommersemester 2018 wiedergibt. Bitte beachten Sie, daß sich im Laufe des Semesters Verschiebungen ergeben können.

Die Vorlesung setzt die *Elementarmathematik 1*, gehalten von Prof. Werner im Wintersemester 2017/18 fort. Daher halten wir uns an das Skript [ElMa2] und setzen den Inhalt des Skripts [ElMa1] zum Teil 1 voraus.

Literatur

[ElMa1] A. Werner, *Elementarmathematik 1*, Skript zur Vorlesung, Wintersemester 2015/16.
[ElMa2] A. Werner, *Elementarmathematik 2*, Skript zur Vorlesung, Sommersemester 2016.
[Wo13] J. Wolfart, *Notizen zur Elementarmathematik II*, Skript zur Vorlesung, Sommersemester 2013.

1. Vorlesungsinhalte

1. Vorlesung — 10.April 2018

Quelle: [ElMa1]

Sneak preview Elementarmathematik 2

- Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
- Funktionen auf $\mathbb{R}$.
- Stetigkeit: lokale Eigenschaft mit Konsequenzen im Großen.
- Ableitung, Differenzierbarkeit: im Kleinen praktisch eine Gerade, lokale Approximierbarkeit, suggestive Notation $\frac{df}{dx}$ nach Leibniz für (Newton) $f'(x)$.
- Integral als Limes von Summen infinitesimal breiter Rechtecke, Flächen, Volumen.
- Komplexe Zahlen: $i^2 = -1$.
- Was ist 0^0?

Wiederholung aus Elementarmathematik 1

- Die vollständige Induktion.
- Binomischer Lehrsatz
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Vorlesung — 17.April 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 1–4

Die reellen Zahlen 1

- Erinnerung: Grenzwert einer Folge.
- Erinnerung Äquivalenzrelationen: ($\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$, und $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$) $\mathbb{R}$ als Cauchyfolgen modulo Nullfolgen.
- $\mathbb{R}$ als angeordneter Körper, Verhalten von $<, \leq, >$ und $\leq$ unter Grenzwerten von Folgen.
- Definition: Intervalle (intuitiv: die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$).
- Definition: Intervallschachtelung.
- Lemma: Sei $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung und sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \in [a_n, b_n]$. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge.
- Satz: für jede Intervallschachtelung gibt es genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt; dies ist der gemeinsame Grenzwert der Folge der unteren/oberen Invervallgrenzen, und auch jeder Folge wie im Lemma.
- Definition: Teilfolge.
- Beschränktheit: beschränkt, nach oben/unten.
- Satz (Bolzano–Weierstraß): jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge. Beweis mittels Intervallschachtelung: iteriertes Halbieren des Intervalls und Wahl einer Hälfte mit unendlich vielen Folgengleidern. Intervalllänge geht gegen 0, weil $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$.

3. Vorlesung 24.April 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 1, 3, 5

Die reellen Zahlen 2

- Monotonie: (streng) monoton wachsend/fallend.
- monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Longrightarrow$ konvergent.
  (analog: monton fallend und nach unten beschränkt $\Longrightarrow$ konvergent).
- Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge reeller Zahlen. Supremum (kleinste obere Schranke von M, wenn M nach oben beschränkt) versus Maximum von M (größtes Element; sofern es existiert!); analog: Infimum (größte untere Schranke von M, wenn M nach unten beschränkt) versus Minimum von M (kleinstes Element; sofern es existiert!).
- Erinnerung: Summenschreibweise, konvergente Reihe.
- Geometrische Reihe (das wichtigste Beispiel einer Reihe überhaupt)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{(falls } |q| < 1).$$

4. Vorlesung 8.Mai 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 6–10

Die reellen Zahlen 3

- Dezimalzahl für $x = x_0, x_1x_2, x_3 \ldots > 0$ mit $x_0 \in \mathbb{N}_0$ und $x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $i \geq 1$. Dann ist $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i/10^i$ als Intervallschachtelung über die Partialsummen

$$a_n := x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq x \leq x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} =: b_n$$

  sieht man die Konvergenz. Für $x < 0$ bekommt man die Dezimaldarstellung aus der von $-x > 0$ durch Vorzeichenwechsel.
- (Un-)Eindeutigkeit der Dezimalzahldarstellung: nur für $x \in [0, 1]$ diskutieren.
- Cantor: abzählbare Mengen, überabzählbare Mengen, Diagonalverfahren.

Funktionen

- Der Funktionsbegriff, Definitionsbereich, Wertebereich.
- Erinnerung: injektiv, surjektiv, bijektiv.

- Reellwertige Funktionen (Werten in $\mathbb{R}$, Beispiel: Polynomfunktion, Gauß-Klammer).
- Reellwertige Funktionen kann man Addieren und Multiplizieren: ein Ring. Verknüpfung (Hintereinanderausführen von Funktionen).

5. VORLESUNG 15.MAI 2018

QUELLE: ABSCHNITT 3.1 DES SYLLABUS

Funktionen

- Vom Wert der Vollständigkeit (geht nicht mit $\mathbb{Q}$ anstelle von $\mathbb{R}$): Definition kontrahierende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h., es gibt ein $q < 1$ so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|.$$
Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts. Anwendung: Iterationsverfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen, zum Beispiel die Flugbahn von Appollo 11 auf dem Weg zum Mond.

QUELLE: [ElMa2] SEITEN 11

Stetigkeit 1

- Definition: Stetigkeit in einem Punkt: mittels ε/δ-Definition; intuitive Definition.
- Definition: Stetigkeit = stetig in jedem Punkt des Definitionsbereichs.
- Beispiele und Gegenbeispiele.
- Unterring der stetigen Funktionen: erhalten unter Addition, Multiplikation und Komposition. Anwendung: Polynome sind stetig.
- Stetigkeit mittels Folgen als Test (Anwendung: Rekursion mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und f stetig. Wenn Limes, dann Fixpunkt von f; graphisch, wie unterscheidet man attrative von repellenden Fixpunkten).

6. VORLESUNG 22.MAI 2018

QUELLE: [ElMa2] SEITEN 12–15

Stetigkeit 2

- Zwischenwertsatz (Bilder von Intervallen sind Intervalle, Anwendung: drehen eines kippelnden vierbeinigen Tisches, vgl. Prof. Kreck auf youtube: Fix a Wobbly Table (with Math)).
- Satz: stetig auf abgeschlossenem Intervall $\Longrightarrow$ beschränkt mit Maximum und Minimum. Bildmenge wieder abgeschlossenes Intervall.
- Definition (streng) monotone Funktion, Definition der Umkehrfunktion. Unter welchen Voraussetzungen auch stetig? Satz: eine stetige Funktion auf einem Intervall hat genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie entweder streng monoton wachsen oder streng monoton fallend ist. Die Umkehrfunktion hat dann ebenfalls diese Eigenschaften. Gegenbeispiel, wenn Definitionsbereich nicht zusammenhängend.

Potenzfunktionen

QUELLE: [ElMa2] SEITE 12, 15–17

- Potenzfunktion $f(x) = x^m$ für $m \in \mathbb{N}$, und dann $m \in \mathbb{Z}$.
- Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x}$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $f(x) = x^m$.
- Potenzfunktion $f(x) = x^{a/b}$ für rationale Exponenten, Potenzgesetze für ganze, dann für rationale Exponenten. Wohldefiniert!

7. VORLESUNG 29.MAI 2018

Reelle Exponenten, Exponentialfunktionen und Logarithmus

QUELLE: [ElMa2] SEITE 17–20, SIEHE AUCH 39–41 FÜR exp

- Potenzfunktion für reelle Exponenten, wohldefiniert (Bernoulli-Ungleichung). Stetigkeit und Monotonie. Potenzgesetze.
- Eulersche Zahl $e := 2,71828\ldots = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, Exponentialfunktion e^x, auch als Potenzreihe und Limes
$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$
(Zinseszins, was ist mehr: 100%, +10% und dann -10%, -10% und dann +10%; was ist mehr: einmal im Jahr x% Zins oder n-mal im Jahr x/n% Zins für $n \to \infty$. Antwort $e^x > 1 + x$ für $x > 0$.)
- Logarithmus $\log_a(x)$ als Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$ bei $a > 0$, speziell für e^x: natürlicher Logarithmus $\ln(x) := \log(x) := \log_e(x)$.
Anwendung: schnelle Definition der Potenzfunktionen für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$:
$$a^x = e^{x\cdot\log(a)}.$$
Logarithmische Skala (Erdbebenskala; Schallstärke dB).
- Diskussion von 0^0 (als Limes von $f(x) = x^x$ für $x \to 0$, die Funktion x^x ist auf $x > 0$ definiert und dort $x^x = e^{x\log(x)}$ stetig als Verkettung, Produkt, Umkehrfunktion, ..., der Limes $x \to 0$ ist zu bestimmen).

8. Vorlesung 5.Juni 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 21–26

Trigonometrie 1

- Strahlensätze, Winkel.
- π via Kreisumfang, Fläche der Kreisscheibe, Bogenmaß.
- Geometrische Definition: Sinus und Cosinus als Winkelfunktionen, Tangens, Cotangens.
- Definition: $\sin(x)$ und $\cos(x)$ als Funktionen auf $\mathbb{R}$. Potenzreihen als Antwort auf die Frage nach Berechnung.
- Periode, Symmetrie, spezielle Werte.
- Trigonometrischer Pythagoras.

9. Vorlesung 12.Juni 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 27–30

Trigonometrie 2

- Additionstheoreme für Sinus, Cosinus und Tangens.
- Winkelverdopplungsformeln.
- Stetigkeit trigonometrischer Funktionen.
- Dreiecksgeometrie mit Sinus und Cosinus. Sinussatz, Cosinussatz.
- Sinus und Cosinus als Potenzreihe.

Quelle: [ElMa2] Seiten 42–45,48

Ableitung 1

- Tangentensteigung als Limes von Sekantensteigung (Beispiel: $1/x$).
- Definition: Differenzierbarkeit.
- Ableitung der Potenzfunktionen, der konstanten Funktion.
- Ableitung von Sinus und Cosinus.
- Additionsregel.

10. Vorlesung 19.Juni 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 46–50

Ableitung 2

- Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel.
- Differenzierbar $\Longrightarrow$ stetig.
- Unterring der differenzierbaren Funktionen: erhalten unter Addition, Multiplikation und Komposition.
- Ableitung von Tangens.
- Ableitung der Umkehrfunktion, Anwendung: Ableitung von $\arctan(x)$.
- Charakterisierung der Euler'schen Zahl e bzw. von e^x vermöge der Differentialgleichung $f(x) = f'(x)$. Ableitung des Logarithmus.
- Tangentensteigung als beste lineare Approximation.
- Taylor-Reihe.
- Newton-Approximation zur Bestimmung von Nullstellen.

11. Vorlesung 26.Juni 2018

Quelle: [ElMa2] Seiten 31–41

Komplexe Zahlen

- Definition als $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Notation $a + bi$ für (a, b). Rechenregeln.
- geometrische Anschauung, die komplexe Ebene.
- $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$, Konjugation, Realteil, Imaginärteil.
- Absolutbetrag (keine Anordnung, aber Abstandsbegriff), Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$, vollständiger Körper.
- Fundamentalsatz der Algebra, Einheitswurzeln (diskrete Fouriertransformation)
- Polarkoordinaten, Geometrie der Addition und Multiplikation (Anwendung: geometrische Beweise mit komplexen Zahlen).
- komplexe Exponentialfunktion, Funktionalgleichung.
- Euler – de Moivre, Zusammenhang von $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\exp(x)$.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

12. Vorlesung 3.Juli 2018

Quelle: [Wo13] Seiten 15-20

Integration

- Treppenfunktionen, Obersummen, Untersummen.
- Riemann-Integral.
- Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.
- Integral und Stammfunktion.
- Partielle Integration, Substitutionsregel, Anwendungen.
- Mittelwertsatz der Integralrechnung.
- Länge einer parametrisierten Kurve, Kreisumfang als Integral, damit π.
- π nicht rational.
- Flächen und Volumen, insbesondere Kugelvolumen und Kugeloberfläche.

13. Vorlesung 10.Juli 2018

Klausur

2. Allgemeinwissen

- Euklids Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen. Variante: unendlich viele Primzahlen mit Rest 3 bei Division durch 4.
- Teilbarkeit für Polynome, Division mit Rest, Nullstellen entsprechen Linearfaktoren.

3. Ergänzungen zum Skript

3.1. **Kontrahierende Funktionen.** In diesem Abschnitt stellen wir Material zum Thema kontrahierende Funktionen zusammen, das nicht in [ElMa1, ElMa2, Wo13] enthalten ist.

Definition 3.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **kontrahierend**, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit

$$0 \leq q < 1$$

gibt, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|.$$

Bemerkung 3.2. Eine kontrahierende Abbildung verringert Abstände. Wenn x, y den Abstand d haben, dann haben $f(x)$ und $f(y)$ einen Abstand $\leq qd$, also sicher $< d$, weil $q < 1$.

Bemerkung 3.3. Man kann kontrahierende Funktionen auch auf Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}$ definieren.

Beispiel 3.4. Eine **(affin-)lineare** Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, für die es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b.$$

Eine solche (affin-)lineare Funktion ist genau dann kontrahierend, wenn $|a| < 1$. Und dann kann man $q = |a|$ nehmen:

$$|f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a| \cdot |x - y|.$$

Und das ist $\leq q \cdot |x - y|$ genau dann (sofern $x \neq y$), wenn $|a| \leq q$.

Proposition 3.5. *Eine kontrahierende Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontrahierend mit dem Faktor $0 \leq q < 1$. Wir weisen Stetigkeit in $x \in \mathbb{R}$ nach. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\delta = \varepsilon$ gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \leq q\delta = q\varepsilon < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen. □

Definition 3.6. Ein **Fixpunkt** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subseteq \mathbb{R}$ ist ein $t \in D$ mit

$$f(t) = t.$$

Bemerkung 3.7. Geometrisch erkennt man Fixpunkte der Funktion f durch den Schnitt des Graphen von $f(x)$ mit der Gerade $y = x$. Ein solcher Schnittpunkt hat die Koordinaten $(t, f(t))$, weil er auf dem Graphen liegt, und es gilt $t = f(t)$, weil er auf der Geraden $y = x$ liegt.

Nicht nur von theoretischem Interesse ist der folgende Fixpunktsatz für kontrahierende Funktionen.

Satz 3.8. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine kontrahierende Funktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei f kontrahierend mit Faktor $0 \leq q < 1$.

Schritt 1: Eindeutigkeit. Angenommen $s \neq t$ sind Fixpunkte, also $f(t) = t$ und $f(s) = s$. Dann gilt

$$|t - s| = |f(t) - f(s)| \leq q \cdot |t - s| < |t - s|,$$

und das ist absurd. Also muß $t = s$ sein.

Schritt 2: Idee für die Existenz. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren rekursiv für alle $n \geq 0$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Damit haben wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, von der wir behaupten, daß sie (a) konvergiert und (b) der Limes ein Fixpunkt von f ist.

Schritt 3: Wir zeigen per Induktion nach n, daß

$$|x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \ldots + q^{n-1}).$$

Das ist klar für $n = 0$ und $n = 1$. Wir nehmen nun an, daß die Ungleichung für $n - 1$ gilt und zeigen sie für n. Für $n \geq 2$ schließen wir mit

$$\begin{aligned}|x_n - x_0| &= |(x_n - x_1) + (x_1 - x_0)| \leq |x_n - x_1| + |x_1 - x_0| \\ &= |f(x_{n-1}) - f(x_0)| + |x_1 - x_0| \leq q \cdot |x_{n-1} - x_0| + |x_1 - x_0| \\ &\leq q \cdot \Big(|x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \ldots + q^{n-2})\Big) + |x_1 - x_0| \\ &= |x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \ldots + q^{n-1}).\end{aligned}$$

Insbesondere folgt, daß für alle $n \geq 0$ gilt

$$|x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \ldots + q^{n-1}) \leq |x_1 - x_0| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}.$$

Schritt 4: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Dazu bemerken wir zunächst für alle $n, m \geq 0$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x_0) + (x_0 - x_m)| \leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| \leq 2\frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} =: c.$$

Damit ist für alle $n, m \geq n_0$ (per Induktion):

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| &\leq q \cdot |x_{n-1} - x_{m-1}| \leq \ldots \\ \ldots \leq q^{n_0} \cdot |x_{n-n_0} - x_{m-n_0}| &\leq c \cdot q^{n_0}.\end{aligned}$$

Geben wir nun $\varepsilon > 0$ vor, dann wird für n_0 groß genug $c \cdot q^{n_0} < \varepsilon$, weil $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Für so ein n_0 gilt dann für alle $n, m \geq n_0$, daß

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

und somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$. Sei t der Grenzwert

$$t = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Schritt 5: Auch $f(t)$ ist Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei nämlich $|x_n - t| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, dann gilt für alle $n \geq n_0 + 1$:

$$|x_n - f(t)| = |f(x_{n-1}) - f(t)| \leq q \cdot |x_{n-1} - t| \leq q\varepsilon < \varepsilon.$$

Da der Grenzwert eindeutig ist, folgt

$$t = \lim_{n\to\infty} x_n = f(t),$$

somit ist t ein Fixpunkt. □

Bemerkung 3.9. Der Beweis von Satz 3.8 enthält wertvolle Zusatzinformation: der Beweis erklärt, wie man den Fixpunkt findet. Man startet irgendwo in x_0 und wendet iteriert die Funktion f an: $x_{n+1} = f(x_n)$. Die so entstehende Folge konvergiert automatisch zum Fixpunkt $t = f(t)$, und zwar mit von q abhängender Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit: (per Induktion)

$$|x_n - t| = |f(x_{n-1}) - f(t)| \leq q|x_{n-1} - t| \leq \ldots \leq q^n \cdot |x_0 - t|.$$

Bemerkung 3.10. Variante: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine kontrahierende Funktion mit $f(D) \subseteq D$. Dann zeigt der gleiche Beweis die Existenz eines Fixpunktes. Wesentlich dabei ist, daß die auftretende Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D bereits einen Limes in D hat (Bolzano-Weierstrass: Existenz einer in D konvergenten Teilfolge, der Limes der Teilfolge ist gleich dem Limes der ganzen Folge, also ist dieser in D).

Jakob Stix, Institut für Mathematik, Goethe–Universität Frankfurt, Robert-Mayer-Str. 6–8, 60325 Frankfurt am Main, Germany

E-mail address: stix@math.uni-frankfurt.de