Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 2 17. April 2018

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden vier Folgen von reellen Zahlen:

(a) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

(b) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(c) $c_n = 12n - n^2$

(d) $d_n = 1 + (-1)^n$

Geben Sie jeweils die ersten fünf Folgenglieder an und untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Sie brauchen Ihre Antworten nicht beweisen. Geben Sie aber im Falle von Beschränktheit eine Schranke an und im Falle von Konvergenz den Grenzwert.

Zur Erinnerung: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend* (bzw. *monoton fallend*), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \ldots$

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(c) $11, 20, 27, 32, 35, \ldots$

(d) $0, 2, 0, 2, 0, \ldots$

Die Schranken in der folgenden Tabelle beziehen sich jeweils auf den Absolutbetrag der Folgenglieder.

	monoton	beschränkt	konvergent
a_n	fallend	durch $\frac{1}{2}$	gegen 0
b_n	nein	durch 1	gegen 0
c_n	nein	nein	nein
d_n	nein	durch 2	nein

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Erinnern Sie sich an die Definition einer Cauchy-Folge. Durch logische Negation ergibt sich: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *keine* Cauchy-Folge, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ Zahlen $n, m \geq N$ existieren mit $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.
(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.
(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 6:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton steigend, falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a_{n+1}$ existiert.
(b) Sie ist nicht nach oben beschränkt, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > a$.
(c) Sie konvergiert nicht gegen a, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$ existiert.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn $a \leq b$.
(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.
(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus (b) falsch ist, wenn man alle $\leq$ durch $<$ ersetzt.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7:

(a) Falls $a \leq b$ gilt, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichungskette

$$a \leq b < b + \varepsilon,$$

also $a < b + \varepsilon$. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, dass $a > b$ gilt, und zeigen, dass ein $\varepsilon > 0$ mit $a \not< b + \varepsilon$ existiert. (Allgemeines Beweisprinzip der Kontraposition: Die Implikation `B` $\Rightarrow$ `A` ist äquivalent zu `nicht A` $\Rightarrow$ `nicht B`.) Falls $a > b$ gilt, wähle $\varepsilon = a - b > 0$. Dann gilt $a = b + \varepsilon$, insbesondere $a \not< b + \varepsilon$.
(b) Setze $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Konvergenz der ersten Folge erhalten wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$. Analog erhalten wir $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_2$. Mit $n = \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann $a < a_n + \varepsilon$ und $b_n - \varepsilon < b$ und es folgt

$$a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $a \leq b$ aus Aufgabe (a).
(c) Wähle $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = 0$. Dann gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not< 0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert a, dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.

Lösungsskizze zu Aufgabe 8:

Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Konvergenz $a_n \to a$ erhalten wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es gilt $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt für $k \geq N$ auch $n_k \geq k \geq N$, und somit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Dies zeigt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Bonusaufgabe.

Drei Zwerge mit den Namen Herr Rot, Herr Grün und Herr Blau treffen sich im Garten. Da bemerkt der eine: „Das ist ja lustig. Wir haben einen roten, einen grünen und einen blauen Hut auf.“ „So ein Zufall – aber keiner von uns trägt einen Hut mit der Farbe seines Namens“, meint der Zwerg mit dem blauen Hut. „Stimmt genau“, entgegnet Herr Grün.

Welche Farbe hat der Hut von Herrn Blau?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **24. April 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
