

## Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

### Übungsblatt 5

8. Mai 2018

#### Aufgabe 17. (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$
- (b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n - 1$
- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$
- (d)  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$
- (e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$
- (f)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, f(n) = 2^n$
- (g)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = |x|$
- (h)  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1), f(x) = \frac{x}{x+1}$

#### Aufgabe 18. (3 Punkte)

Sei  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  die Menge aller Folgen, deren Folgenglieder alle 0 oder 1 sind. Zeigen Sie, dass  $X$  nicht abzählbar ist.

*Hinweis: Benutzen Sie ein Diagonalverfahren wie im Beweis der Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$  (Satz 1.12 im Skript).*

#### Aufgabe 19. (2 Punkte)

Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  Abbildungen. Zeigen Sie:

- (a) Sind  $f$  und  $g$  injektiv, dann auch  $g \circ f$ .
- (b) Sind  $f$  und  $g$  surjektiv, dann auch  $g \circ f$ .

#### Aufgabe 20. (3 Punkte)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergiert.

*Hinweis: Zeigen Sie, dass  $[b_1, b_2] \supseteq [b_3, b_4] \supseteq \dots$  eine Intervallschachtelung ist, wobei  $b_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i$  die  $n$ -te Partialsumme bezeichnet.*

### **Bonusaufgabe.**

Ein Mathematiker fragt seinen Kollegen nach dem Alter dessen drei Töchter. Er antwortet: „Zusammen sind sie halb so alt wie Du, und wenn ich ihre Alter multipliziere, erhalte ich 36.“ „Das reicht leider nicht als Antwort. Eine Information fehlt mir noch“, erwidert der erste. „Die älteste spielt Klavier“, fügt der zweite hinzu. „Okay, jetzt weiß ich die Antwort“, sagt der erste.

Wie alt sind die Töchter des Mathematikers?

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **15. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18\\_SS\\_Elementarmathematik\\_II](https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II)

---