Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 3 24. April 2018

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

(a) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ldots$
(b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$
(c) $0{,}75 + 0{,}075 + 0{,}0075 + \ldots$

Lösungsskizze zu Aufgabe 9:

Für alle drei Folgen benutzen wir die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, nämlich mit $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{10}$:

(a) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \dfrac{1}{1-(-\frac{1}{5})} = \dfrac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$

(b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(c) $0{,}75 + 0{,}075 + 0{,}0075 + \ldots = 0{,}75 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = 0{,}75 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n =$
$0{,}75 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{6}$

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie: $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Lösungsskizze zu Aufgabe 10:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Da (b_n) beschränkt ist, existiert ein $b > 0$, so dass $|b_n| \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \varepsilon/(2b)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon/(2b) \cdot b = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Somit ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit. Geben Sie für nach oben beschränkte Mengen das Supremum, für nach unten beschränkte das Infimum an. Handelt es sich jeweils um ein Maximum bzw. Minimum?

(a) $M_1 = \left\{ \frac{2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $M_2 = \{x^3 + 1 : x \in \mathbb{R}\}$

(c) $M_3 = [2, 5) \cup [6, 7)$

(d) $M_4 = \left\{ \frac{1}{x} : x > 0 \right\}$

(e) $M_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 4| < 1\}$

Lösungsskizze zu Aufgabe 11:

	b. nach unten	Infimum	Minimum	b. nach oben	Supremum	Maximum
M_1	ja	0	nein	ja	1	ja
M_2	nein	–	–	nein	–	–
M_3	ja	2	ja	ja	7	nein
M_4	ja	0	nein	nein	–	–
M_5	ja	-5	nein	ja	-3	nein

(a) Es gilt $\inf M_1 = 0$, da alle Elemente ≥ 0 sind und $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+1} = 0$ gilt. Das Infimum ist selbst nicht Teil der Menge, da $\frac{2}{n^2+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, es handelt sich also nicht um ein Minimum. Da die Folge $a_n = \frac{2}{n^2+1}$ streng monoton fallend ist, hat die Menge der Folgenglieder das Maximum $a_1 = 1$.

(b) Es handelt sich um die Menge $M_2 = \mathbb{R}$, da jede reelle Zahl sich als $x^3 + 1$ für ein $x \in \mathbb{R}$ darstellen lässt. Die Menge aller reellen Zahlen ist nach oben und unten unbeschränkt.

(c) M_3 besteht aus allen reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die $2 \leq x < 5$ oder $6 \leq x < 6$ gilt. Die kleinste solche Zahl ist $x = 2$, dies ist das Minimum. Das Supremum ist 7, es handelt sich aber nicht um ein Maximum, da 7 nicht selbst Teil der Menge ist.

(d) Es gilt $M_4 = \mathbb{R}_{>0}$, die Menge aller positiven reellen Zahlen. Das Infimum ist 0; dies ist kein Minimum, da 0 selbst nicht positiv ist. Nach oben ist die Menge unbeschränkt.

(e) M_5 besteht aus den Zahlen, deren Abstand zu -4 kleiner als 1 ist, also $M_5 = (-5, -3)$. Infimum und Supremum sind -5 und -3, diese Intervallgrenzen sind aber selbst nicht im Intervall enthalten.

Aufgabe 12. (7 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der genannten Eigenschaft an oder begründen Sie, warum es kein solches Beispiel gibt.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und nicht monoton

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 5 und besitzt eine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, aber besitzt eine beschränkte Teilfolge

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt keine konvergente Teilfolge

(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und unbeschränkt

(g) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt zwei konvergente Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten

Lösungsskizze zu Aufgabe 12:

(a) $a_n = (-1)^n$ oder $(a_1, a_2, \ldots) = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

(b) existiert nicht: konvergiert (a_n) gegen 5, dann nach Aufgabe 8 auch jede Teilfolge

(c) $(1, 2, 3, \ldots)$

(d) $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$ mit Teilfolge $(0, 0, 0, \ldots)$

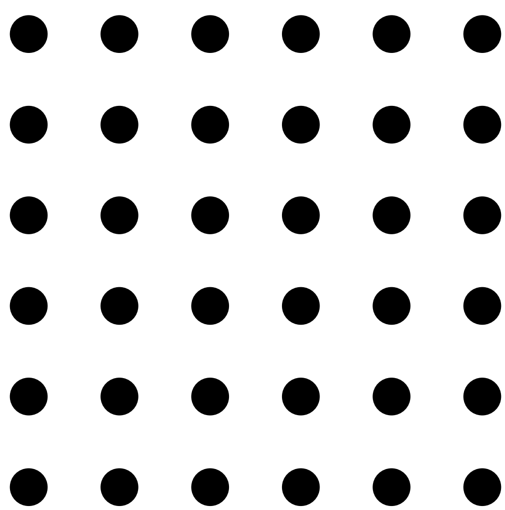
(e) existiert nicht: nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge

(f) existiert nicht: Konvergiert (a_n) gegen a, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann ist $|a_n|$ durch $\max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}$ beschränkt.

(g) $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ mit Teilfolgen $(0, 0, 0, \ldots)$ und $(1, 1, 1, \ldots)$

Bonusaufgabe.

Sechsunddreißig Steine sind in einem Quadrat angeordnet, in sechs Reihen à sechs Steinen. Man entferne sechs Steine auf solche Weise, dass sich hinterher immer noch in jeder Reihe, vertikal und horizontal, eine gerade Anzahl an Steinen befindet.



Abgabe: Am kommenden **Mittwoch**, den **2. Mai 2018**, bis **12 Uhr** in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`