Algebraische Zahlentheorie

Blatt 3 — 8.05.2018

Aufgabe 10.

Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

(a) Zeigen Sie, daß M als R-Modul endlich erzeugt ist, wenn dies für M' und M'' gilt. Zeigen Sie, daß für einen noetherschen Ring R auch die Umkehrung gilt.

(b) Seien $\varphi' : R^n \twoheadrightarrow M'$ und $\varphi'' : R^m \twoheadrightarrow M''$ surjektive R-Modulhomomorphismen. Zeigen Sie, daß es ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi'"] & R^n \oplus R^m \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & R^m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

gibt, mit $i(a) = (a, 0)$ und $\pi(a, b) = b$. Zeigen Sie, daß φ surjektiv sein muß.

Aufgabe 11. (Ordnungen)

Eine Ordnung in einem Zahlkörper F ist ein Unterring $\mathfrak{o} \subseteq F$, der (i) als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist, und (ii) eine $\mathbb{Q}$-Basis von F enthält. Zeigen Sie:

(a) Jede Ordnung in einem quadratischen Zahlkörper ist von der Form $\mathbb{Z}[\alpha]$ für ein geeignetes Element α.

(b) Der Ganzheitsring $\mathfrak{o}_F$ ist eine Ordnung.

(c) Jede Ordnung im Zahlkörper F ist im Ganzheitsring $\mathfrak{o}_F$ enthalten.

Bemerkung: Aufgrund der Behauptungen dieser Aufgabe nennt man $\mathfrak{o}_F$ auch die Maximalordnung (in F).

Aufgabe 12. (Ganzzahlbasis)

Sei $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zahlkörper vom Grad $n = [F : \mathbb{Q}]$, der vom über $\mathbb{Z}$ ganzen Element α als Körper erzeugt wird.

(a) Zeigen Sie, daß es natürliche Zahlen

$$1 = d_0 \mid d_1 \mid \ldots \mid d_{n-1}$$

und normierte ganzzahlige Polynome $f_i(T) \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\deg(f_i) = i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und nicht-negativen Koeffizienten $\leq d_i$ gibt, so daß

$$\beta_0 = \frac{1}{d_0} f_0(\alpha) = 1,\ \beta_1 = \frac{1}{d_1} f_1(\alpha),\ \ldots, \beta_{n-1} = \frac{1}{d_{n-1}} f_{n-1}(\alpha)$$

eine Ganzzahlbasis von $\mathfrak{o}_F$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß mit den Daten aus (a) die folgende Formel für Diskriminanten gilt

$$d(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = d(\mathfrak{o}_F) \cdot \Big(\prod_{i=0}^{n-1} d_i\Big)^2.$$

Tipp: Elementarteilersatz und obere Dreiecksform, $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathfrak{o}_F \cap \bigoplus_{j=0}^{i} \mathbb{Q} \cdot \alpha^j$.

Aufgabe 13. (Norm bei endlichen Körpern)

Es sei l/k eine Erweiterung endlicher Körper. Bestimme Kern und Bild der Normabbildung $N_{l/k} : l^\times \to k^\times$.

Tipp: Denken Sie an die Struktur der multiplikativen Gruppe eines endlichen Körpers und den Frobeniusautomorphismus.

Aufgabe 14. (Primzerlegung)

(a) Erklären Sie die Faktorisierung in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = \frac{17 - \sqrt{-23}}{2} \cdot \frac{17 - +\sqrt{-23}}{2}$$

mittels eindeutiger Primidealfaktorisierung.

(b) Finden Sie selbst ein entsprechendes Beispiel in einem quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für ein quadratfreies d Ihrer Wahl.

Tipp: SAGE.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 17.05.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---

22. Mai 2018