Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 4 1. Mai 2018

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Achilles und die Schildkröte laufen um die Wette. Weil Achilles 10 mal so schnell wie die Schildkröte läuft, wird dieser ein Vorsprung gewährt. Achilles benötigt 7 Sekunden, um den Punkt zu erreichen, von dem die Schildkröte gestartet ist. In dieser Zeit ist die Schildkröte aber schon ein Stück weitergelaufen. Um die neue Position der Schildkröte zu erreichen, benötigt Achilles wieder eine gewisse Zeit. Die Schildkröte ist bis dahin wieder ein Stück weiter und Achilles benötigt wiederum eine gewisse Zeit, um diesen Punkt zu erreichen. Es scheint, als ließe sich das Argument beliebig oft wiederholen, ohne dass Achilles die Schildkröte je einholen würde.

Wie lässt sich der vermeintliche Widerspruch auflösen? Wie lange braucht Achilles, um die Schildkröte einzuholen?

Lösungsskizze zu Aufgabe 13:

Es ist richtig, dass sich der beschriebene Prozess unendlich oft wiederholt: Achilles benötigt unendlich oft eine gewisse Zeit, um die jeweils vorherige Position der Schildkröte zu erreichen. Diese Zeiten werden aber immer kürzer und ergeben in der Summe dennoch eine endliche Zeitspanne. Mit anderen Worten: es handelt sich um eine Reihe von positiven reellen Zahlen, die konvergiert.

Achilles benötigt $a_0 = 7$ Sekunden, um die Startposition der Schildkröte zu erreichen. Diese ist inzwischen ein Zehntel des anfänglichen Vorsprungs weitergelaufen. Um zu diesem Punkt zu gelangen, benötigt Achilles $a_1 = 7/10$ Sekunden. Die Schildkröte ist in dieser Zeit ein Zehntel der von Achilles eben zurückgelegten Strecke weitergelaufen; um dorthinzugelangen, braucht Achilles $a_2 = 7/10^2$ Sekunden usw. Wenn wir das Spiel weiterspielen, erhalten wir unendlich viele positive Zeitspannen von $a_n = 7/10^n$ Sekunden.

In der Summe ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 7/10^n \\
&= 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\
&= 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= 7 \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 7 \cdot \frac{10}{9} \\
&= \frac{70}{9} \\
&= 7{,}7777\ldots,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe benutzt haben, um von der dritten zur vierten Zeile zu gelangen. Achilles hat die Schildkröte also nach $7{,}7777\ldots$ Sekunden eingeholt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Summen mittels der Σ-Summenschreibweise:

(a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{20}$

(b) $1^k + 2^k + \ldots + n^k$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{99}{100}$

(d) $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots - 51$

Lösungsskizze zu Aufgabe 14:

(a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{20} \frac{1}{i}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} \frac{i}{i+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{25} (-1)^i (2i+1)$

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 15:

Bezeichne $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ die n-te Partialsumme. Dann gilt $b_n - b_{n-1} = a_n$, denn:

$$b_n - b_{n-1} = (a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = a_n.$$

(Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, einschließlich $n = 1$, wenn wir $b_0 \coloneqq 0$ definieren.) Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedeutet nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir können auf verschiedene Weise weiterargumentieren:

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge (siehe Lemma 7.1 im Elementarmathematik-1-Skript). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ gilt. Für $n \geq n_0 + 1$ gilt dann

$$|a_n| = |b_n - b_{n-1}| < \varepsilon,$$

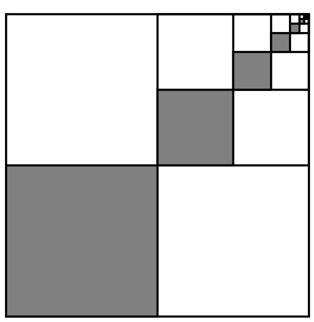
somit ist (a_n) eine Nullfolge.

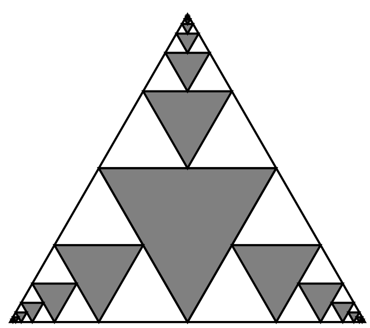
Alternativ: Sei $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Grenzwert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$ gilt. Für $n \geq n_0 + 1$ gilt dann mit der Dreiecksungleichung:

$$|a_n| = |b_n - b_{n-1}| \leq |b_n - b| + |b - b_{n-1}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Welcher Anteil der Figur ist jeweils eingefärbt?





Lösungsskizze zu Aufgabe 16:

(a) Das größte eingefärbte Teilquadrat nimmt $1/4$ der Gesamtfläche ein, das nächstkleinere ein Viertel von einem Viertel, also $1/4^2$ der Gesamtfläche. Das nächstkleinere nimmt ein Viertel von einem Viertel von einem Viertel, also den Anteil $1/4^3$ ein usw. Insgesamt ergibt sich mit der geometrischen Reihe der Anteil

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\\
&= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

das Quadrat ist also zu einem Drittel eingefärbt.

(b) Das Dreieck ist in vier gleichgroße Teildreiecke unterteilt, von denen das mittlere komplett eingefärbt ist; dieses hat also den Anteil $1/4$. Dann gibt es drei nächstkleinere eingefärbte Teildreiecke, welche jeweils ein Viertel eines Viertels, also zusammen den Anteil $3 \cdot 1/4^2$ von der Gesamtfläche einnehmen. Die drei nächstkleineren nehmen jeweils ein Viertel eines Viertels eines Viertels, also zusammen $3 \cdot 1/4^3$ ein usw. Insgesamt ergibt sich mit der geometrischen Reihe wie oben der Anteil

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4^2}+3\cdot\frac{1}{4^3}+\ldots &= \frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}\cdot\frac{4}{3}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

es ist also genau die Hälfte der Figur eingefärbt.

Bonusaufgabe.

Professor Trix, der für seine ungewöhnlichen mündlichen Prüfungen bekannt ist, erklärt zwei Studenten den Ablauf. Sie werden gleich in einen Raum geführt und bekommen jeweils einen schwarzen oder weißen Hut aufgesetzt. Die Studenten können den Hut des anderen sehen, ihren eigenen aber nicht. Professor Trix zählt dann bis drei und die Studenten nennen gleichzeitig eine Farbe. Falls einer von ihnen seine eigene Hutfarbe genannt hat, bekommen beide eine 1,0. Wenn beide falsch lagen, fallen sie durch. Bevor sie den Raum betreten, dürfen sie sich noch kurz besprechen, im Raum dürfen sie jedoch nicht mehr miteinander kommunizieren.

Können die Studenten es schaffen, sicher zu bestehen, egal welche Hüte sie aufgesetzt bekommen?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **8. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
