Algebraische Zahlentheorie

Blatt 4 — 17.05.2018

Aufgabe 15. (Chinesischer Restsatz)

Sei A ein Dedekindring.

(a) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremde Ideale von A, dann ist das Bild von $\mathfrak{b}$ in $A/\mathfrak{a}$ das Ideal (1).

(b) Seien $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ paarweise verschiedene Primideale von A. Sei $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ und $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{p}$ mit Exponent 1 jedoch keines der Primideale $\mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, s$ in der Primidealzerlegung von (x) vorkommen.

(c) Zeigen Sie, daß für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von A jedes Ideal des Quotienten $A/\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist.

(d) Zeigen Sie, daß jedes Ideal von A durch höchstens zwei Elemente erzeugbar ist.

Tipp zu (c): Reduzieren Sie auf den Fall von Bildern von Primidealen unter $A \to A/\mathfrak{a}$ und nutzen Sie (a) und (b).

Aufgabe 16. (Schwache Approximation)

Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K, und seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ paarweise verschiedene Primideale $\neq (0)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein Hauptideal $(x) \lhd A$ (kein echt gebrochenes Ideal!), in dessen eindeutiger Primidealfaktorisierung $\mathfrak{p}$ mit Exponent 1 auftritt.

(b) Für alle $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}$ gibt es Elemente $x \in K^\times$ gibt mit $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = n_i$ für alle $i = 1, \ldots, s$. (Insbesondere ist $v_{\mathfrak{p}} : K^\times \to \mathbb{Z}$ surjektiv!)

(c) Die Klassengruppe $\mathrm{Cl}(A)$ wird von den Idealklassen aller Primideale $\mathfrak{q} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_s\}$ erzeugt.

Aufgabe 17. (Charakterisierung von Dedekindringen)

Zeigen Sie, daß ein Integritätsring A, dessen von (0) verschiedene Ideale eine eindeutige Primidealzerlegung haben, ein Dedekindring oder ein Körper ist. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

(a) Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ tritt das Primideal $\mathfrak{p}$ in der Primidealzerlegung von $\mathfrak{a}$ auf.

(b) Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ist die Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{b}$ ein Teil der Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{a}$.

(c) Der Ring A ist noethersch.

(d) Von (0) verschiedene Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ von A sind teilerfremd: $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = (1)$.

(e) Jedes von (0) verschiedene Primideal ist maximal.

(f) Sei K der Quotientenkörper von A. Zu jedem $0 \neq x \in K$ gibt es Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ und dazu paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t$ mit (in K):

$$x \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s = \mathfrak{q}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_t.$$

(g) Sei $0 \neq x \in K$ ganz über A. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A mit $x \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

Tipp: Betrachten Sie $A[x] \subseteq K$ und skalieren Sie.

(h) Folgern sie aus den letzten beiden Teilaufgaben, daß A ganz-abgeschlossen ist.

Aufgabe 18.

Nutzen Sie SAGE, um eine Liste der Klassenzahlen der quadratischen Zahlkörper $F/\mathbb{Q}$ mit Betrag der Diskriminante $|\Delta_F| \leq 1000$ zu erstellen.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 24.05.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---

16. Mai 2018