Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 5 8. Mai 2018

Aufgabe 17. (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n - 1$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$
(d) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$
(f) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f(n) = 2^n$
(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = |x|$
(h) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Lösungsskizze zu Aufgabe 17:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
injektiv	ja	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja
surjektiv	ja	nein	nein	ja	ja	nein	ja	ja
bijektiv	ja	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja

Eine Abbildung $f : A \to B$ ist injektiv, wenn für $a, a' \in A$ gilt: aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$. Sie ist surjektiv, wenn für alle $b \in B$ ein Urbild $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert. Sie ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

(a) injektiv: $2x - 1 = 2x' - 1 \Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$
surjektiv: für $y \in \mathbb{R}$ ist $\frac{y+1}{2}$ ein Urbild

(b) injektiv: folgt aus der Injektivität in (a)
Die Funktion ist nicht surjektiv, da $2n-1$ für $n \in \mathbb{N}$ nur ungerade Werte annimmt. Zum Beispiel existiert kein $n \in \mathbb{N}$ mit $2n - 1 = 2$, denn $\frac{3}{2}$ liegt nicht in $\mathbb{N}$.

(c) nicht injektiv: es gilt $f(1) = -1 = f(-1)$, aber $1 \neq -1$
nicht surjektiv: da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, nimmt die Funktion nur Werte ≤ 0 an, insbesondere existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $-x^2 = 1$

(d) injektiv: aus $x_1^2 = x_2^2$ folgt $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0$ und somit $x_1 = x_2$ oder $x_1 = -x_2$. Da beide Zahlen ≥ 0 sind, gilt $x_1 = x_2$.
surjektiv: für $y \geq 0$ ist $\sqrt{y}$ ein Urbild

(e) nicht injektiv: es gilt $f(\frac{1}{2}) = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0 = \lfloor 0 \rfloor = f(0)$, aber $\frac{1}{2} \neq 0$
surjektiv: für jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist a selbst ein Urbild: $f(a) = \lfloor a \rfloor = a$

(f) injektiv: $2^{n_1} = 2^{n_2} \Rightarrow 2^{n_1 - n_2} = 2^{n_1}/2^{n_2} = 1 \Rightarrow n_1 - n_2 = 0$, also $n_1 = n_2$
nicht surjektiv: es existiert kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $2^n = 3$. Für $n \geq 0$ wäre das ein Widerspruch zur eindeutigen Primfaktorzerlegung; für $n < 0$ würde $1 = 2^{-n} \cdot 3$ implizieren, dass 3 ein Teiler von 1 ist.

(g) nicht injektiv: $|1| = 1 = |-1|$, aber $1 \neq -1$
surjektiv: für $y \geq 0$ ist y selbst ein Urbild: $|y| = y$

(h) injektiv: $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \Rightarrow x_1(x_2+1) = x_2(x_1+1) \Rightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
surjektiv: für $y \in [0,1)$ ist $\frac{y}{1-y}$ ein Urbild:

$$\frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y}+1} = \frac{y}{y+(1-y)} = \frac{y}{1} = y$$

(wobei sich die erste Gleichung durch Erweitern mit $1-y$ ergibt). Aus $y \in [0,1)$ folgt, dass der Zähler $y \geq 0$ und der Nenner $1-y > 0$ ist. Insbesondere ist der Nenner $\neq 0$ und $\frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wie kommt man auf das Urbild? Man macht den Ansatz $\frac{x}{x+1} = y$ und löst nach x auf:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} = y \;&\Rightarrow\; x = y(x+1) \;\Rightarrow\; x = xy + y \\ &\Rightarrow\; x - xy = y \;\Rightarrow\; x(1-y) = y \\ &\Rightarrow\; x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Aufgabe 18. (3 Punkte)

Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen, deren Folgenglieder alle 0 oder 1 sind. Zeigen Sie, dass X nicht abzählbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie ein Diagonalverfahren wie im Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ *(Satz 1.12 im Skript).*

Lösungsskizze zu Aufgabe 18:

Angenommen, wir haben eine abzählbare Liste von Folgen

$$\begin{array}{cccc} (a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots) \\ (a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots) \\ (a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots) \\ & \vdots & & \end{array}$$

deren Folgenglieder $a_{i,j}$ alle 0 oder 1 sind. Dann konstruieren wir im Diagonalverfahren die neue Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir $b_n := 1 - a_{n,n}$ setzen, d.h. wir ändern in der Diagonalfolge $(a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots)$ alle Nullen zu Einsen und umgekehrt. Nach Konstruktion unterscheidet sich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an der n-ten Stelle von der n-ten Folge in der Liste; sie ist also nicht in der Aufzählung vorhanden. Somit gibt es keine vollständige Aufzählung aller Folgen in X.

Aufgabe 19. (2 Punkte)

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, dann auch $g \circ f$.

(b) Sind f und g surjektiv, dann auch $g \circ f$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 19:

Zur Erinnerung: Die Verknüpfung $g \circ f : A \to C$ der beiden Abbildungen ist definiert durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(a) Seien $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Wir müssen $a = a'$ zeigen.

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \\ \Rightarrow\quad & g(f(a)) = g(f(a')) \\ \Rightarrow\quad & f(a) = f(a') && \text{(nach Injektivität von } g) \\ \Rightarrow\quad & a = a' && \text{(nach Injektivität von } f) \end{aligned}$$

(b) Sei $c \in C$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $a \in A$ existiert mit $(g \circ f)(a) = c$. Nach Surjektivität von g existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Nach Surjektivität von f existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dann gilt

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

Aufgabe 20. (3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $[b_1, b_2] \supseteq [b_3, b_4] \supseteq \dots$ eine Intervallschachtelung ist, wobei $b_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i$ die n-te Partialsumme bezeichnet.

Lösungsskizze zu Aufgabe 20:

Wir zeigen, dass $[b_1, b_2] \supseteq [b_3, b_4] \supseteq \dots$ eine Intervallschachtelung ist. Die Intervalle sind $[b_{2n-1}, b_{2n}]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die obere Intervallgrenze ist dabei stets größer oder gleich der unteren Intervallgrenze, denn es gilt $b_{2n} = b_{2n-1} + a_{2n}$ und $a_{2n} \geq 0$. (Die Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 0}$ sind alle ≥ 0, da die Folge monoton fallend gegen 0 konvergiert.) Die Intervallschachtelungseigenschaft $[b_{2n-1}, b_{2n}] \supseteq [b_{2n+1}, b_{2n+2}]$ bedeutet, dass $b_{2n+1} \geq b_{2n-1}$ und $b_{2n+2} \leq b_{2n-2}$ gilt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= b_{2n} - a_{2n+1} = b_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}, \\ b_{2n+2} &= b_{2n+1} + a_{2n+2} = b_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \end{aligned}$$

(ungerade nummerierte Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit negativem Vorzeichen, gerade nummerierte mit positivem Vorzeichen), und den Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_{2n+1} &\geq 0, \\ -a_{2n+1} + a_{2n+2} &\leq 0, \end{aligned}$$

die wiederum aus der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgen. Schließlich konvergieren die Intervalllängen $b_{2n} - b_{2n-1} = a_{2n}$ gegen 0, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Nach dem Intervallschachtelungssatz (Satz 1.4 im Skript) existiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen enthalten ist. Diese Zahl ist gemeinsamer Grenzwert der Folge $(b_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ der unteren und der Folge $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der oberen Intervallgrenzen. Man überlegt sich leicht, dass x dann auch Grenzwert der Folge der Partialsummen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ gegen x konvergiert.

Bonusaufgabe.

Ein Mathematiker fragt seinen Kollegen nach dem Alter dessen drei Töchter. Er antwortet: „Zusammen sind sie halb so alt wie Du, und wenn ich ihre Alter multipliziere, erhalte ich 36.“ „Das reicht leider nicht als Antwort. Eine Information fehlt mir noch“, erwidert der erste. „Die älteste spielt Klavier“, fügt der zweite hinzu. „Okay, jetzt weiß ich die Antwort“, sagt der erste.

Wie alt sind die Töchter des Mathematikers?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **15. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
