

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 7

22. Mai 2018

Aufgabe 25. (3 Punkte)

Für $m \geq 2$ in \mathbb{N} und $c > 0$ ist $\sqrt[m]{c} \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert als die eindeutige positive reelle Zahl mit $(\sqrt[m]{c})^m = c$. Zeigen Sie:

- (a) Für $m \geq 2$ in \mathbb{N} und $c_1, c_2 > 0$ gilt $\sqrt[m]{c_1 c_2} = \sqrt[m]{c_1} \sqrt[m]{c_2}$.
- (b) Für $m, n \geq 2$ in \mathbb{N} und $c > 0$ gilt $\sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[mn]{c}$.
- (c) Für $m \geq 2$ und $n \geq 1$ in \mathbb{N} und $c > 0$ gilt $\sqrt[m]{c^n} = (\sqrt[m]{c})^n$.

Aufgabe 26. (4 Punkte)

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\text{Bild}(f) \subseteq [0, 1]$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$ existiert.

Aufgabe 27. (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ injektiv ist und bestimmen Sie das Bild und die Umkehrfunktion.
- (b) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1} : \text{Bild}(f) \rightarrow D$. Zeigen Sie: f^{-1} ist injektiv, es gilt $\text{Bild}(f^{-1}) = D$ und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Aufgabe 28. (6 Punkte)

- (a) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $\text{Bild}(f) \subseteq D'$. Zeigen Sie: Sind f und g monoton wachsend, dann auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Untersuchen Sie die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ und $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$ auf Monotonie.

— bitte wenden —

Bonusaufgabe.

Ludwig ist in die Hölle geraten und hat gleich ein Gespräch, in dem über sein weiteres Schicksal entschieden wird. Ihm gegenüber sitzen drei Teufel an einem Tisch. Der Teufel der Wahrhaftigkeit sagt immer die Wahrheit, der Teufel der Täuschung lügt immer und der Teufel der Diplomatie sagt manchmal die Wahrheit, manchmal die Unwahrheit. Ludwig erkundigt sich, wer ihm in der Mitte gegenüber sitzt.

Der linke Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Wahrhaftigkeit.“

Der mittlere Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Täuschung.“

Der rechte Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Diplomatie.“

Welcher Teufel sitzt wo?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **29. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II
