Algebraische Zahlentheorie

Blatt 5 — 24.05.2018

Aufgabe 19. (Minkowskischer Linearformensatz)

Seien für $i = 1, \ldots, n$ Linearformen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ und $\det(a_{ij}) \neq 0$ gegeben. Zeigen Sie, daß es zu positiven reellen Zahlen $C_1, \ldots, C_n$ mit

$$\prod_{i=1}^n C_i > |\det(a_{ij})|$$

stets ein $0 \neq x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ gibt mit $|f_i(x)| < C_i$ für alle $1, \ldots, n$.

Aufgabe 20.

Zeigen Sie, daß das Vorzeichen der Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers F gleich $(-1)^s$ ist, wobei s die Anzahl der komplexen Stellen angibt.

Tipp: Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform auf

$$F_{\mathbb{R}} = \Big(\prod_{\tau} \mathbb{C}\Big)^+,$$

welche auf F vermöge $F \hookrightarrow F_{\mathbb{R}}$ die Spurform induziert. Berechnen Sie die Diskriminante der Spurform bezüglich einer geeigneten $\mathbb{R}$-Basis von $F_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 21. (Imaginär-quadratisch mit Klassenzahl 1)

Sei $F/\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

(a) Für ein Primideal $\mathfrak{p} \lhd \mathfrak{o}_F$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$ gilt $\mathfrak{p} = (p)$ oder $N(\mathfrak{p}) = p$.

Tipp: Vergleichen Sie mit $N((p))$.

Sei nun $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d > 0$ quadratfrei mit Klassenzahl 1. Zeigen Sie:

(b) Falls $p < d/4$ gilt, so folgt $\mathfrak{p} = (p)$. Ist $d \not\equiv -1 \pmod 4$, so reicht sogar $p < d$.

Tipp: Nutzen Sie (a) und, daß $\mathfrak{p}$ nach Voraussetzung ein Hauptideal ist.

(c) Für $d = 5$, 6, oder 10 hat $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ nicht Klassenzahl 1.

Tipp: Benutzen Sie (b) und das Zerlegungsgesetz in einem quadratischen Zahlkörper $F/\mathbb{Q}$: für eine Primzahl p ist (p) ein Primideal von F genau dann, wenn p kein Teiler der Diskriminante Δ_F ist und das Legendre-Symbol $\left(\frac{\Delta_F}{p}\right) = -1$ ist.

(d) Falls $d \geq 13$ gilt, so folgt $d \equiv 19 \pmod{24}$. Und falls $d \geq 21$ gilt, so folgt $d \equiv 43, 67 \pmod{120}$.

Tipp: Benutzen Sie weiter den Tipp zu (c).

(e) Falls $0 < d < 283$, so muß $d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ sein, und für jeden dieser Werte hat $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ tatsächlich Klassenzahl 1.

Tipp: Nutzen Sie die Schranke für die Norm eines Ideals in einer gegebenen Klasse der Idealklassengruppe und schauen Sie sich die Ideale kleiner Norm einzeln an. Alternativ für kleine d zeigen Sie, daß für $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$ der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ euklidisch bezüglich der Norm $N_{F/\mathbb{Q}}$ ist.

Aufgabe 22. (Konsequenzen aus der Endlichkeit der Klassenzahl)

(a) Sei F ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{o}_F$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}^n = (x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathfrak{o}_F$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_E$ ein Hauptideal ist in $\mathfrak{o}_E$, dem Ganzzahlring zum Körper $E = F(\sqrt[n]{x})$ für eine (jede) Wahl von $\sqrt[n]{x}$.

(b) Sei F ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie, daß es eine endliche Körpererweiterung E/F gibt, so daß jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}_F$ in $\mathfrak{o}_E$ ein Hauptideal wird, das heißt $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_E$ ist Hauptideal von $\mathfrak{o}_E$ für alle $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{o}_F$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 05.06.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---