

## Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

### Übungsblatt 8

29. Mai 2018

#### Aufgabe 29. (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Für alle  $a > 0$  in  $\mathbb{R}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $a^{x+y} = a^x a^y$ . Sie dürfen die Aussage für rationale Zahlen  $x$  und  $y$  als bewiesen annehmen.
- (b) Zeigen Sie: Für  $a, b > 0$  in  $\mathbb{R}$  gilt  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ .

#### Aufgabe 30. (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es zwei irrationale positive reelle Zahlen  $a, b > 0$  gibt, für die  $a^b$  rational ist.

*Hinweis: Betrachten Sie  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ .*

#### Aufgabe 31. (6 Punkte)

- (a) Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen, so dass  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$  gilt. Zeigen Sie:  $f = g$ .
- (b) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, nicht konstant 0, mit  $f(x+y) = f(x)f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Es gilt  $f(x) = a^x$  für ein  $a > 0$ .  
*Hinweis 1: Angenommen, Sie kennen  $f(1)$ , was sind dann  $f(2), f(3), \dots$ ?  
Hinweis 2: Benutzen Sie (a).*

#### Aufgabe 32. (5 Punkte)

- (a) Sei  $a > 1$ . Zeigen Sie: Für  $x = a^{\frac{1}{a-1}}$  und  $y = a^{\frac{a}{a-1}}$  gilt

$$x^y = y^x.$$

- (b) Berechnen Sie  $x$  und  $y$  im Fall  $a = 2$ .
- (c) Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x < y$ , so dass  $x^y = y^x$  gilt. Zeigen Sie, dass ein  $a > 1$  existiert, so dass  $x$  und  $y$  wie in (a) durch  $x = a^{\frac{1}{a-1}}$  und  $y = a^{\frac{a}{a-1}}$  gegeben sind.  
*Hinweis: Wählen Sie  $a = y/x$ .*

— bitte wenden —

### Bonusaufgabe.

Für welche sechsstellige Zahl ABCDEF gilt:

$$ABCDEF \cdot 1 = ABCDEF$$

$$ABCDEF \cdot 3 = BCDEFA$$

$$ABCDEF \cdot 2 = CDEFAB$$

$$ABCDEF \cdot 6 = DEFABC$$

$$ABCDEF \cdot 4 = EFABCD$$

$$ABCDEF \cdot 5 = FABCDE$$

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **5. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18\\_SS\\_Elementarmathematik\\_II](https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II)

---