Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 6 15. Mai 2018

Aufgabe 21. (3 Punkte)

Seien die Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{x+1}.$$

(a) Berechnen Sie $(fg)(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(f)$.

(c) Berechnen Sie $(g \circ f)(x)$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 21:

(a) $(fg)(x) = f(x)\,g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$

(b) Nach Definition ist $\mathrm{Bild}(f)$ die Menge der reellen Zahlen $y \in \mathbb{R}$, für die ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y = \frac{1}{x}$ existiert. Dafür muss $y \neq 0$ und $x = \frac{1}{y}$ sein. Damit x in $\mathbb{R}_{>0}$ liegt, muss außerdem $y > 0$ gelten. Das zeigt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Umgekehrt, falls $y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, dann ist $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Urbild, somit liegt y im Bild. Also gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0}$.

(c) $g \circ f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert nach (b) und es gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x+1},$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch Erweitern mit x ergibt.

Aufgabe 22. (4 Punkte)

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass auch $f + g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ stetig mit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq D'$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 22:

(a) Sei $x \in D$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $f+g$ in x stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für alle $y \in D$ mit $|x-y| < \delta_1$ gilt. Ebenso, da g stetig ist, existiert $\delta_2 > 0$, so dass $|g(x)-g(y)| < \varepsilon/2$

für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta_2$ gilt. Wir setzen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $f + g$ in x stetig.

(b) Seien $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g in $f(x)$ stetig ist, existiert $\delta' > 0$, so dass $|g(f(x)) - g(y')| < \varepsilon$ für alle $y' \in D'$ mit $|f(x) - y'| < \delta'$ gilt. Da f in x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \delta'$ für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Für solche y gilt dann (mit $y' := f(y)$)

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon.$$

Aufgabe 23. (7 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, x\}$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ n \mapsto (-1)^n$

Lösungsskizze zu Aufgabe 23:

Vorab: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist unstetig in $x \in D$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\delta > 0$ ein $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ existiert. Dies ist die logische Negation der Stetigkeitsbedingung. Anschaulich gesprochen: Man kann x mit Punkten y beliebig nahe kommen, während die Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ mindestens ε auseinander liegen.

(a) f ist unstetig in allen ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$: Für alle $y < x$ gilt $\lfloor y \rfloor \leq x - 1$. Für beliebiges $\delta > 0$ existiert ein $y < x$ mit $|x - y| < \delta$, etwa $y = x - \delta/2$; und dann ist

$$|\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| = x - \lfloor y \rfloor \geq 1.$$

In allen anderen Zahlen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist f stetig: Gelte $n < x < n + 1$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und sei $\delta := \min\{(n + 1) - x, x - n\} > 0$ der Abstand zur nächsten ganzen Zahl. Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt dann ebenfalls $n < y < n + 1$, also $\lfloor y \rfloor = n = \lfloor x \rfloor$. Daraus folgt die Stetigkeit von f in x.

(b) f ist stetig. Das folgt aus $|(x-1)-(y-1)| = |x-y|$, man kann also $\delta := \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen.

(c) f ist stetig: Das folgt aus $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$, was sich wie folgt aus der Dreiecksungleichung herleiten lässt. Es gilt

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$$

nach der Dreiecksungleichung, somit $|x|-|y| \leq |x-y|$. Die gleiche Ungleichung mit x und y in vertauschten Rollen liefert $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$. Da sowohl $|x|-|y|$ als auch $-(|x|-|y|)$ kleiner oder gleich $|x-y|$ sind, folgt die behauptete Ungleichung für den Absolutbetrag. (Alternativ kann man die Stetigkeit durch eine Fallunterscheidung nach $x<0$, $x=0$ und $x>0$ zeigen.)

(d) f ist stetig: Es gilt $f(x)=0$, falls $x<0$ ist, und sonst $f(x)=x$. Ist $x<0$, so gilt auch $y<0$ für alle Zahlen, die hinreichend nahe an x sind; dort ist f konstant 0, somit stetig. Ist $x>0$, gilt auch $y>0$ für alle y, die hinreichend nahe an x sind; die Stetigkeit von f folgt dann aus der Stetigkeit der Funktion $x \mapsto x$. Es bleibt der Fall $x=0$. Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Für $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta := \varepsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\text{im Fall } y \leq 0\text{: } |f(0)-f(y)| = |0-0| = 0 < \varepsilon,\\
&\text{im Fall } y \geq 0\text{: } |f(0)-f(y)| = |0-y| = |y| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist f auch in 0 stetig.

(e) f ist unstetig in 0: Für beliebiges $\delta>0$ gilt $|0-y|<\delta$ mit $y := \delta/2$, aber

$$|f(0)-f(y)| = |0-1| = 1.$$

In allen anderen Punkten ist f stetig: Ist $x>0$, dann auch $y>0$ für alle y, die hinreichend nah an x sind; dort ist f konstant 1 und damit stetig. Analog gilt die Stetigkeit in $x<0$, wo f konstant -1 ist.

(f) f ist stetig: Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\varepsilon>0$ beliebig. Für $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|}.$$

Ist $|x-y| \leq |x|/2$, dann ist nach der Dreiecksungleichung $|y| \geq |x|-|x-y| \geq |x|/2$, somit

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq \frac{|x-y|}{|x|^2/2}.$$

Ist außerdem $|x-y| < \varepsilon|x|^2/2$, folgt $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$. Wir setzen also $\delta := \min\{|x|/2, \varepsilon|x|^2/2\}$, um die Stetigkeitsbedingung zu erfüllen.

(g) f ist stetig: Ist nämlich $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{Z}$ mit $|x-y|<1$, dann ist $x=y$ und damit $f(x)=f(y)$. Daraus folgt sogar, dass jede Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 24. (6 Punkte)

Sei $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ definiert als

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

(a) Zeigen Sie: Für $x \geq 1$ gilt $f(x) \geq 1$, so dass f als Abbildung mit dem angegebenen Werte- und Definitionsbereich wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f kontrahierend ist.

(c) Bestimmen Sie den eindeutigen Fixpunkt von f.

Lösungsskizze zu Aufgabe 24:

(a) Für $x \geq 1$ gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \geq 1 &\Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2x && \text{(Multiplikation mit } 2x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist erfüllt, da $(x-1)^2 \geq 0$ gilt.

(b) Für $x, y \in [1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{y} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(x-y) - \frac{1}{xy}(x-y) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| |x-y|. \end{aligned}$$

Aus $x, y \in [1, \infty)$ folgt $xy \in [1, \infty)$, somit $\frac{1}{xy} \in (0, 1]$ und $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \leq \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

für alle $x, y \in [1, \infty)$, also ist f kontrahierend.

(c) Wir lösen die Fixpunktgleichung $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{2} && \text{(Subtraktion von } x/2) \\ &\Leftrightarrow 2 = x^2 && \text{(Multiplikation mit } 2x) \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $\pm\sqrt{2}$; da aber $x \geq 1$ ist, ist $x = +\sqrt{2}$ der eindeutige Fixpunkt.

Bonusaufgabe.

Sieben Freunde treffen sich. Sie sind ein bisschen durcheinander und können sich nicht erinnern, welcher Wochentag es ist.

Matthias: „Heute ist Dienstag“

Adrian: „Nein, morgen ist Dienstag“

Matteo: „Ihr liegt beide falsch. Dienstag war gestern“

Jonathan: „Nein, Matteo, gestern war Samstag“

Max: „Heute ist entweder Donnerstag oder Freitag“

David: „Das glaube ich nicht. Heute ist nämlich Sonntag“

Markus: „Nein, heute ist nicht Sonntag“

Nur einer der Freunde liegt mit seiner Aussage richtig. An welchem Wochentag treffen sie sich?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **22. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
