Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 7 22. Mai 2018

Aufgabe 25. (3 Punkte)

Für $m \geq 2$ in $\mathbb{N}$ und $c > 0$ ist $\sqrt[m]{c} \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert als die eindeutige positive reelle Zahl mit $(\sqrt[m]{c})^m = c$. Zeigen Sie:

(a) Für $m \geq 2$ in $\mathbb{N}$ und $c_1, c_2 > 0$ gilt $\sqrt[m]{c_1 c_2} = \sqrt[m]{c_1}\,\sqrt[m]{c_2}$.

(b) Für $m, n \geq 2$ in $\mathbb{N}$ und $c > 0$ gilt $\sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[mn]{c}$.

(c) Für $m \geq 2$ und $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$ und $c > 0$ gilt $\sqrt[m]{c^n} = (\sqrt[m]{c})^n$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 25:

(a) Zu zeigen ist, dass die m-te Potenz der rechten Seite gleich $c_1 c_2$ ist:

$$\begin{aligned} (\sqrt[m]{c_1}\,\sqrt[m]{c_2})^m &= (\sqrt[m]{c_1})^m\,(\sqrt[m]{c_2})^m && \text{(Rechenregel } (ab)^m = a^m b^m\text{)} \\ &= c_1 c_2 && \text{(Definition der } m\text{-ten Wurzel)} \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen ist, dass die mn-te Potenz der linken Seite gleich c ist:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{c}}\right)^{mn} &= \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{c}}\right)^m\right)^n && \text{(Rechenregel } a^{mn} = (a^m)^n\text{)} \\ &= \left(\sqrt[n]{c}\right)^n && \text{(Definition der } m\text{-ten Wurzel)} \\ &= c && \text{(Definition der } n\text{-ten Wurzel).} \end{aligned}$$

(c) Zu zeigen ist, dass die m-te Potenz der rechten Seite gleich c^n ist:

$$\begin{aligned} \left(\left(\sqrt[m]{c}\right)^n\right)^m &= \left(\sqrt[m]{c}\right)^{mn} && \text{(Rechenregel } (a^n)^m = a^{mn}\text{)} \\ &= \left(\left(\sqrt[m]{c}\right)^m\right)^n && \text{(Rechenregel } a^{mn} = (a^m)^n\text{)} \\ &= c^n && \text{(Definition der } m\text{-ten Wurzel)} \end{aligned}$$

Alternativ kann man (a) benutzen:

$$\sqrt[m]{c^n} = \sqrt[m]{c \cdot c \cdot \dots \cdot c} = \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{c} \cdots \sqrt[m]{c} = \left(\sqrt[m]{c}\right)^n.$$

Aufgabe 26. (4 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq [0,1]$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$ existiert.

Lösungsskizze zu Aufgabe 26:

Die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ ist äquivalent zu $f(x) - x = 0$. Wir betrachten also die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ und müssen zeigen, dass ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ existiert. Als Differenz zweier stetiger Funktionen ist auch g stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 = f(0) \geq 0, \\ g(1) &= f(1) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

wegen $\mathrm{Bild}(f) \subseteq [0,1]$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert nun ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$, also $f(x) = x$.

Aufgabe 27. (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ injektiv ist und bestimmen Sie das Bild und die Umkehrfunktion.

(b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathrm{Bild}(f) \to D$. Zeigen Sie: f^{-1} ist injektiv, es gilt $\mathrm{Bild}(f^{-1}) = D$ und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 27:

(a) Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert als

$$g(y) = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Für alle $x \in (1,\infty)$ gilt $f(x) \in (0,\infty)$ und

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2} + 1 = (x-1) + 1 = x.$$

Das impliziert, dass f injektiv ist, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Für $y \in (0,\infty)$ gilt $g(y) \in (1,\infty)$ und

$$f(g(y)) = f\left(\frac{1}{y^2} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y^2} + 1\right) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

Daraus folgt $\mathrm{Bild}(f) = (0,\infty)$, denn $g(y)$ ist ein Urbild von y, und es folgt, dass $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion zu f ist.

(b) Für $y \in \mathrm{Bild}(f)$ ist $f^{-1}(y) \in D$ definiert als das eindeutige Element mit $f(f^{-1}(y)) = y$. Das impliziert die Injektivität von f^{-1}, denn aus $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ folgt

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

Für $x \in D$ ist x selbst das eindeutige Urbild von $f(x)$ unter f, also $f^{-1}(f(x)) = x$. Das zeigt, dass $\mathrm{Bild}(f^{-1}) = D$ gilt ($f(x)$ ist ein Urbild von $x \in D$ unter f^{-1}), und dass $f = (f^{-1})^{-1}$ die Umkehrfunktion von f ist.

Aufgabe 28. (6 Punkte)

(a) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq D'$. Zeigen Sie: Sind f und g monoton wachsend, dann auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ und $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$ auf Monotonie.

Lösungsskizze zu Aufgabe 28:

(a) Vorab: In der Definition von „monoton wachsend" ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$) kann man das „$<$" durch „$\leq$" ersetzen, da die Implikation im Fall $x_1 = x_2$ automatisch richtig ist.

Seien nun $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ nach Monotonie von f und dann $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ nach Monotonie von g (hier benutzen wir die obige Bemerkung), also $(g \circ f)(x_1) \leq (g \circ f)(x_2)$. Damit ist auch $g \circ f$ monoton wachsend.

(b) f ist streng monoton wachsend. Wir wissen schon, dass die Funktion $x \mapsto x^3$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wachsend ist. (Dies folgt aus: $a < b \Rightarrow ac < bc$ für $c > 0$ und $a, b \geq 0$). Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Wir unterscheiden drei Fälle je nach Vorzeichen: Falls $0 \leq x_1 < x_2$, dann gilt $x_1^3 < x_2^3$ wegen der strengen Monotonie auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Falls $x_1 < 0 \leq x_2$, dann $x_1^3 < 0 \leq x_2^3$. Falls schließlich $x_1 < x_2 < 0$, dann gilt $-x_1 > -x_2 > 0$. Aus der Monotonie auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt dann $(-x_1)^3 > (-x_2)^3$, also $-x_1^3 > -x_2^3$ und somit $x_1^3 < x_2^3$.

g ist nicht monoton, denn es gilt $g(-1) = 0$, $g(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ und $g(0) = 0$. Also $-1 < -\frac{1}{2} < 0$, aber $g(-1) > g(-\frac{1}{2}) < g(0)$.

Bonusaufgabe.

Ludwig ist in die Hölle geraten und hat gleich ein Gespräch, in dem über sein weiteres Schicksal entschieden wird. Ihm gegenüber sitzen drei Teufel an einem Tisch. Der Teufel der Wahrhaftigkeit sagt immer die Wahrheit, der Teufel der Täuschung lügt immer und der Teufel der Diplomatie sagt manchmal die Wahrheit, manchmal die Unwahrheit. Ludwig erkundigt sich, wer ihm in der Mitte gegenüber sitzt.

Der linke Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Wahrhaftigkeit."
Der mittlere Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Täuschung."
Der rechte Teufel antwortet: „In der Mitte sitzt der Teufel der Diplomatie."

Welcher Teufel sitzt wo?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **29. Mai 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
