Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 8 29. Mai 2018

Aufgabe 29. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für alle $a > 0$ in $\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^{x+y} = a^x a^y$. Sie dürfen die Aussage für rationale Zahlen x und y als bewiesen annehmen.

(b) Zeigen Sie: Für $a, b > 0$ in $\mathbb{R}$ gilt $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 29:

(a) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Nach Definition ist dann $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ und $a^y = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y,$$

und somit

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n} = \big(\lim_{n\to\infty} a^{x_n}\big)\big(\lim_{n\to\infty} a^{y_n}\big) = a^x a^y,$$

wobei wir die Aussage für rationale Zahlen, die wir als bewiesen annehmen, für die zweite Gleichheit benutzt haben.

(b) Der Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$. Das heißt, $\log(ab)$ ist die eindeutige Zahl $\ell \in \mathbb{R}$, für die $e^\ell = ab$ gilt. Nach (a) gilt

$$e^{\log(a)+\log(b)} = e^{\log(a)} e^{\log(b)} = ab$$

und damit $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Aufgabe 30. (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es zwei irrationale positive reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt, für die a^b rational ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 30:

Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist, dann können wir $a = b = \sqrt{2}$ wählen. Ansonsten wählen wir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, was dann ja irrational ist, und $b = \sqrt{2}$, denn es gilt

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

was rational ist.

Aufgabe 31. (6 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Zeigen Sie: $f = g$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, nicht konstant 0, mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = a^x$ für ein $a > 0$.
Hinweis 1: Angenommen, Sie kennen $f(1)$, was sind dann $f(2)$, $f(3), \ldots$?
Hinweis 2: Benutzen Sie (a).

Lösungsskizze zu Aufgabe 31:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Voraussetzung gilt $f(x_n) = g(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir

$$f(x) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = g(x),$$

wobei die Stetigkeit von f für die zweite Gleichheit, die von g für die vorletzte benutzt wird.

(b) Sei $a := f(1)$. Dann gilt

$$f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = a \cdot a = a^2,$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) = a^2 \cdot a = a^3,$$

usw., induktiv also $f(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = f\Big(\frac{x}{2}\Big)^2,$$

also $f(x) \geq 0$. Insbesondere gilt $a \geq 0$, so dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$ wohldefiniert ist. Wir müssen zeigen, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir haben schon gezeigt, dass f und g auf allen natürlichen Zahlen übereinstimmen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0).$$

Da f nicht konstant 0 ist, existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$. Dann lässt sich $f(x)$ kürzen und es folgt $f(0) = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n)f(-n),$$

somit $f(-n) = f(n)^{-1} = (a^n)^{-1} = a^{-n}$. Damit stimmen f und g auf allen ganzen Zahlen überein. Für rationale Zahlen $p/q \in \mathbb{Q}$ gilt nun

$$f\left(\frac{p}{q}\right)^q = f\Big(q \cdot \frac{p}{q}\Big) = f(p) = a^p,$$

somit $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$. Damit stimmen f und g auf allen rationalen Zahlen überein. Die Funktionen f und g sind beide stetig, aus (a) folgt also $f = g$. Da f nicht konstant 0 ist, muss außerdem $a > 0$ sein.

Aufgabe 32. (5 Punkte)

(a) Sei $a > 1$. Zeigen Sie: Für $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ und $y = a^{\frac{a}{a-1}}$ gilt

$$x^y = y^x.$$

(b) Berechnen Sie x und y im Fall $a = 2$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$, so dass $x^y = y^x$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $a > 1$ existiert, so dass x und y wie in (a) durch $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ und $y = a^{\frac{a}{a-1}}$ gegeben sind.
Hinweis: Wählen Sie $a = y/x$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 32:

(a) Wir berechnen

$$x^y = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{a^{\frac{a}{a-1}}} = a^{\frac{1}{a-1} \cdot a^{\frac{a}{a-1}}},$$

$$y^x = \left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{a^{\frac{1}{a-1}}} = a^{\frac{a}{a-1} \cdot a^{\frac{1}{a-1}}} = a^{\frac{1}{a-1} \cdot a^{1+\frac{1}{a-1}}} = a^{\frac{1}{a-1} \cdot a^{\frac{a}{a-1}}}$$

und sehen, dass $x^y = y^x$ gilt.

(b) Für $a = 2$ ist $x = 2^{\frac{1}{2-1}} = 2^1 = 2$ und $y = 2^{\frac{2}{2-1}} = 2^2 = 4$. In der Tat gilt $2^4 = 4^2$.

(c) Wir wählen $a = y/x > 1$, so dass $y = ax$ gilt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} & x^{ax} = (ax)^x & \\ \Rightarrow\quad & x^a = ax & ((-)^{1/x} \text{ auf beiden Seiten}) \\ \Rightarrow\quad & x^{a-1} = a & (\cdot x^{-1} \text{ auf beiden Seiten}) \\ \Rightarrow\quad & x = a^{\frac{1}{a-1}} & ((-)^{\frac{1}{a-1}} \text{ auf beiden Seiten}) \end{aligned}$$

Weiterhin folgt

$$y = ax = a \cdot a^{\frac{1}{a-1}} = a^{1+\frac{1}{a-1}} = a^{\frac{a}{a-1}}.$$

Bonusaufgabe.

Für welche sechsstellige Zahl ABCDEF gilt:

$$\begin{aligned} \text{ABCDEF} \cdot 1 &= \text{ABCDEF} \\ \text{ABCDEF} \cdot 3 &= \text{BCDEFA} \\ \text{ABCDEF} \cdot 2 &= \text{CDEFAB} \\ \text{ABCDEF} \cdot 6 &= \text{DEFABC} \\ \text{ABCDEF} \cdot 4 &= \text{EFABCD} \\ \text{ABCDEF} \cdot 5 &= \text{FABCDE} \end{aligned}$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **5. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
