Algebraische Zahlentheorie

Blatt 6 — 12.06.2018

Aufgabe 23.

Sei $F/\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante Δ, und sei p eine Primzahl. Es sei an das Legendresymbol

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & a \text{ ist quadratischer Rest modulo } p \text{ und } p \nmid a, \\ -1 & a \text{ ist kein quadratischer Rest modulo } p, \\ 0 & p \mid a \end{cases}$$

erinnert. Zeigen Sie:

(a) Das Primdeal (p) ist in F verzweigt genau dann, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$.

(b) Das Primdeal (p) ist in F voll zerlegt genau dann, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$.

(c) Das Primdeal (p) ist in F unverzweigt und unzerlegt genau dann, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$.

Tipp: Zerlegungssatz. Benutzen Sie eine geeignete Darstellung $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\vartheta]$.

Aufgabe 24.

(a) Sei p eine Primzahl. Was ist das maximale n, für das es einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[T] \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{F}_p$$

gibt?

(b) Seien F ein Zahlkörper und p eine Primzahl. Angenommen $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\vartheta]$ ist von einem Element ϑ erzeugt. Zeigen Sie dann die Abschätzung

$$\#\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Max}(\mathfrak{o}_F) \ ; \ \mathfrak{q} \mid (p) \text{ und } f_{\mathfrak{q}|(p)} = 1\} \leq p.$$

Tipp: Was haben (a) und (b) miteinander zu tun?

(c) Zeigen Sie, daß für die folgenden Zahlkörper F der Ganzzahlring $\mathfrak{o}_F$ nicht von der Form $\mathbb{Z}[\vartheta]$ ist:

(1) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-23})$,

(2) $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit Minimalpolynom von α gegeben durch $X^3 - X - 8$.

Tipp: (b) mit welchem p? Bei (1) ist $\mathfrak{o}_F$ von $\sqrt{-7}$ und $\sqrt{-23}$ erzeugt. Bei (2) überlegen Sie sich, daß $\mathfrak{o}_F$ die $\mathbb{Z}$-basis $1, \alpha, \beta$ mit $\beta = (\alpha + \alpha^2)/2$ hat.

Aufgabe 25.

Sei E/F eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern. Zeigen Sie unter der Annahme einer der beiden folgenden Bedingungen, daß höchstens endlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}_F$ in $\mathfrak{o}_E$ unzerlegt sind.

(a) E/F sei galoissch und die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/F)$ nicht zyklisch.

(b) E/F besitze Zwischenkörper $E_1 \neq E_2$ mit gleichem Grad $[E_1 : F] = [E_2 : F]$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 19.06.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---