Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 11 19. Juni 2018

Aufgabe 41. (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(x)$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sin(x)}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$
(Per Konvention ist $a^{b^c} = a^{(b^c)}$, nicht $(a^b)^c$.)

Aufgabe 42. (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f in x, also $f^{(0)}(x) = f(x)$ und $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ für $n \geq 1$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(0)$ und $f'(x)$ für $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} q_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

wobei q_n ein Polynom ist, also von der Form $q_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_d t^d$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $p \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{x \to 0} x^{-p} e^{-1/x^2} = 0.$$

— **bitte wenden** —

Aufgabe 43. (3 Punkte)

Die Tangensfunktion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Die Arkustangensfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ist als Umkehrfunktion des Tangens definiert. Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Aufgabe 44. (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^x$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f durch

$$f'(x) = (1 + \log(x))x^x$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von f.

Bonusaufgabe.

Ein Forscher entdeckt eine Inselgruppe. Auf jeder der drei Inseln leben 100 Personen. Jeder Inselbewohner sagt entweder immer die Wahrheit oder lügt immer. Der Forscher betritt die erste Insel und erkundigt sich nach der Anzahl der Lügner. Der erste Einwohner sagt: „Es lebt genau ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben genau zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben genau 100 Lügner auf dieser Insel.“

Auf der zweiten Insel befragt der Forscher ebenfalls die Einwohner. Der erste sagt: „Es lebt mindestens ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben mindestens zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben mindestens 100 Lügner auf dieser Insel.“

Dann befragt der Forscher die Einwohner der dritten Insel. Der erste sagt: „Es leben weniger als ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben weniger als zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben weniger als 100 Lügner auf dieser Insel.“

Welche Schlüsse zieht der Forscher über die Anzahl der Lügner auf den Inseln?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **26. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
