Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 9 5. Juni 2018

Aufgabe 33. (4 Punkte)

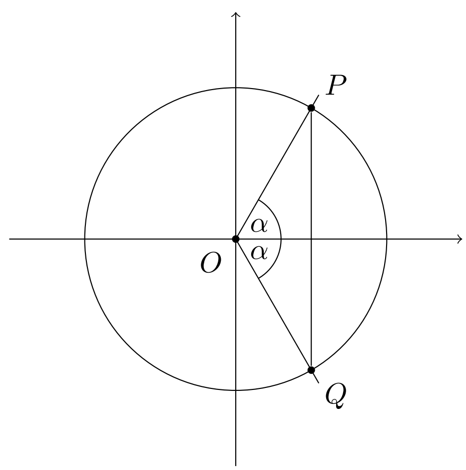
Zeigen Sie anhand des Einheitskreises, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

(b) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Lösungsskizze zu Aufgabe 33:

Sei P der Punkt, den man erhält, wenn man von $(1, 0)$ ausgehend das Bogenmaß α auf dem Einheitskreis abläuft. Für positives α läuft man gegen den Uhrzeigersinn, für negatives α umgekehrt. Dann sind $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ definiert als die x- und y-Koordinate des Punktes P.



Bezeichne Q den Punkt, den man für den Winkel $-\alpha$ erhält. Dafür läuft man auf dem Einheitskreis genauso weit wie für P, aber in der entgegengesetzten Richtung. Es handelt sich also um den Spiegelpunkt von P an der x-Achse. Damit hat Q die gleiche x-Koordinate wie P, also $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, und die negative y-Koordinate, also $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

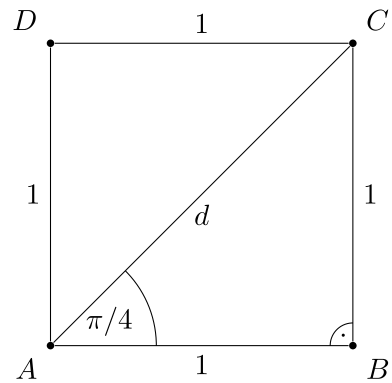
Aufgabe 34. (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\sin(\pi/4)$, $\cos(\pi/4)$ und $\tan(\pi/4)$ mit Hilfe eines Quadrats.

(b) Berechnen Sie $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/3)$ und $\tan(\pi/3)$ mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks.

Lösungsskizze zu Aufgabe 34:

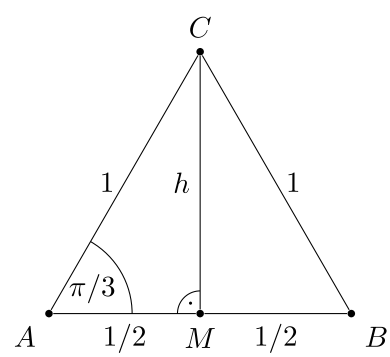
(a) Wir betrachten folgendes Quadrat der Kantenlänge 1:



Dass der eingezeichnete Winkel $\pi/4$ beträgt, folgt zum Beispiel aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC und dem Winkelsummensatz. Nach dem Satz des Pythagoras beträgt die Länge der Diagonale $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/4) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
\sin(\pi/4) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
\tan(\pi/4) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten folgendes gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1:



Der eingezeichnete Winkel beträgt $\pi/3$ nach dem Winkelsummensatz und weil alle Winkel im gleichseitigen Dreieck gleich sind. Nach dem Satz des Pythagoras beträgt die Höhe

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

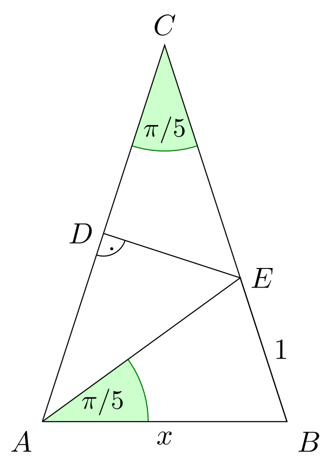
Wir berechnen:

$$\cos(\pi/3) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{AM}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$
$$\sin(\pi/3) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{MC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\tan(\pi/3) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{MC}{AM} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,.$$

Aufgabe 35. (6 Punkte)

(a) Eine Strecke sei so in zwei Abschnitte unterteilt, dass der längere Abschnitt a zum kürzeren Abschnitt b im gleichen Verhältnis steht wie die Gesamtstrecke c zu a. Dieses Seitenverhältnis heißt goldener Schnitt und wird mit φ bezeichnet. Zeigen Sie, dass φ die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ erfüllt. Folgern Sie, dass $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gilt.

(b) Gegeben sei folgendes gleichschenklige Dreieck mit gleichlangen Seiten AC und BC:



Bestimmen Sie die Winkel $\angle CBA$, $\angle AEB$ und $\angle EAD$. Folgern Sie, dass AE und EC die Länge x haben. Folgern Sie außerdem, dass die Dreiecke ABE und CAB ähnlich sind, d.h. die gleichen Winkel und damit die gleichen Seitenverhältnisse haben. Leiten Sie daraus her, dass x der goldene Schnitt φ ist.

(c) Benutzen Sie das Dreieck CDE, um $\cos(\pi/5) = \frac{1}{2}x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ zu zeigen. Folgern Sie, dass in einem regelmäßigen Fünfeck die langen Diagonalen im goldenen Schnittverhältnis zur Kantenlänge stehen.

Lösungsskizze zu Aufgabe 35:

(a) Nach Definition ist $\varphi = \frac{a}{b}$ und $\varphi = \frac{a+b}{a}$. Daraus folgt

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \varphi^{-1}.$$

Die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ ergibt sich daraus durch Multiplikation mit φ. Die Mitternachtsformel für die Gleichung $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ liefert

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mit Minus würde sich wegen $\sqrt{5} > 1$ eine negative Zahl ergeben, aber φ ist als Verhältnis zweier Seitenlängen positiv. Also gilt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Da die Seiten AC und BC gleich lang sind, sind die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CBA$ gleich groß. Nach dem Winkelsummensatz folgt

$$\angle CBA = \angle BAC = \frac{1}{2}(\pi - \pi/5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck ABE folgt

$$\angle AEB = \pi - \pi/5 - 2\pi/5 = 2\pi/5.$$

Die Winkel $\angle BAE = \pi/5$ und $\angle EAD$ addieren sich zu $\angle BAC = 2\pi/5$, damit ist

$$\angle EAD = 2\pi/5 - \pi/5 = \pi/5.$$

Es folgt, dass das Dreieck ABE gleichschenklig ist mit gleich langen Seiten AB und AE, also ist $AE = x$. Ebenso ist das Dreieck AEC gleichschenklig mit gleich langen Seiten AE und EC, somit ist auch $EC = x$. Durch Vergleich der Winkel sehen wir, dass die Dreiecke ABE und CAB ähnlich sind. Insbesondere sind die Seitenverhältnisse AE/BE und CB/AB gleich, also

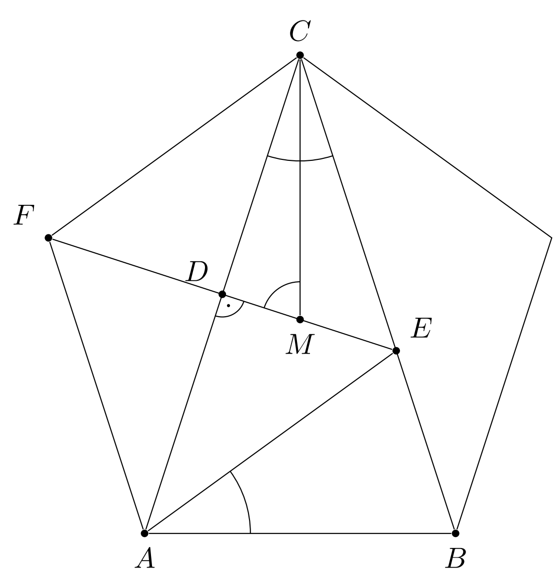
$$\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}.$$

Damit teilt E die Strecke CB im goldenen Schnittverhältnis: $x = \varphi$.

(c) Durch Vergleich der Winkel in den Dreiecken CDE und ADE sieht man, dass diese spiegelbildlich an der Strecke DE gegenüberliegen, insbesondere ist D der Mittelpunkt der Strecke AC. Die Strecke AC hat die gleiche Länge wie BC, nämlich $1 + x$, also gilt $CD = \frac{1}{2}(x + 1)$. Im Dreieck CDE berechnen wir

$$\cos(\pi/5) = \frac{CD}{CE} = \frac{\frac{1}{2}(1+x)}{x} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

wobei wir $\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}$ benutzt haben. Betrachten wir nun ein regelmäßiges Fünfeck:



Dabei ist M der Mittelpunkt, zu dem alle Ecken des Fünfecks den gleichen Abstand haben. Die Punkte D und E sind als Schnittpunkte der Geraden durch F und M mit den Diagonalen AC und BC definiert. Die Gerade ist eine Spiegelsymmetrieachse für das Fünfeck, was den rechten Winkel bei D erklärt. Die beiden Speichen MC und MF des regelmäßigen Fünfecks bilden den Winkel $2\pi/5$, da sich die fünf gleich großen Speichenwinkel zu 2π addieren. Mit dem Winkelsummensatz im Dreieck DCM folgt

$$\angle ACB = 2 \cdot \angle DCM = 2(\pi - \pi/2 - 2\pi/5) = \pi/5.$$

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\pi - \pi/5) = 2\pi/5.$$

Aufgrund der Spiegelsymmetrie ist außerdem

$$\angle EAD = \angle DCE = \angle ACB = \pi/5$$

und somit $\angle BAE = \pi/5$. Es handelt sich also (mit passender Skalierung) um die Figur aus Aufgabenteil (b). Für das Verhältnis von Diagonale zu Seitenlänge gilt damit

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1+x}{x} = x = \varphi.$$

Aufgabe 36. (6 Punkte)

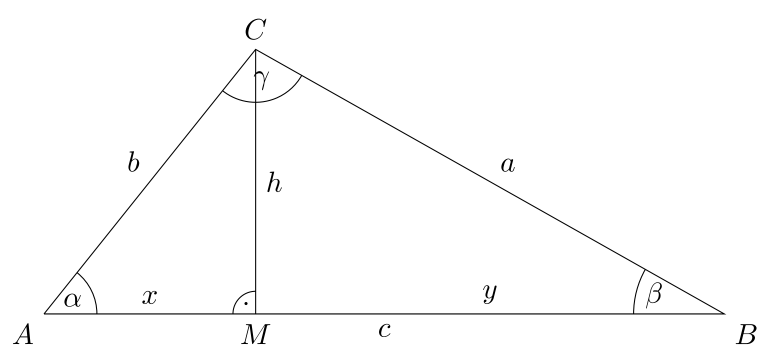
Gegeben sei ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ. Wie üblich liege α gegenüber a, β gegenüber b und γ gegenüber c. Die Höhe h auf der Seite c teile diese in zwei Abschnitte x und y.

(a) Geben Sie Sinus und Kosinus von α und β als Verhältnisse von Strecken an.

(b) Drücken Sie c in Abhängigkeit von a, b, α, β aus.

(c) Angenommen, Sie kennen α, β und c. Nach dem wsw-Kongruenzsatz ist das Dreieck dadurch bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Berechnen Sie die Seitenlängen a und b in Abhängigkeit der bekannten Größen.

Lösungsskizze zu Aufgabe 36:



(a) Im Dreieck AMC erhalten wir

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{b},$$
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b},$$

und im Dreieck BMC erhalten wir

$$\cos(\beta) = \frac{y}{a},$$
$$\sin(\beta) = \frac{h}{a}.$$

(b) Aus (a) folgt

$$c = x + y = b\cos(\alpha) + a\cos(\beta).$$

(c) Aus (a) erhalten wir

$$b\sin(\alpha) = h = a\sin(\beta)$$

und damit $b = a\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$. (Der Sinus ist als Seitenverhältnis positiv und insbesondere nicht 0.) Eingesetzt in (b) liefert das

$$\begin{aligned} c &= a\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha) + a\cos(\beta) \\ &= a\frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

und somit lässt sich a durch α, β und c als

$$a = \frac{c\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}$$

ausdrücken. (Der Nenner ist wieder nicht 0, da die Sinus- und Kosinuswerte positiv sind.) Für b gilt dann

$$b = a\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{c\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}.$$

Bonusaufgabe.

Man ordne die Zahlen $1, 2, \ldots, 16$ in einer Reihe an, so dass sich je zwei nebeneinanderstehende Zahlen zu einer Quadratzahl addieren.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **12. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
