Algebraische Zahlentheorie

Blatt 8 — 26.06.2018

Im Folgenden sei $p > 2$ eine Primzahl, $\zeta = \zeta_p$ eine primitive $p$te Einheitswurzel und $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ der Kreisteilungskörper der p-ten Einheitswurzeln mit Ganzheitsring $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Auf diesem Blatt wollen wir den Satz von Fermat im 'ersten Fall'[1] für reguläre[2] Primzahlen beweisen, wie dies schon Ernst Eduard Kummer 1847 konnte.

Satz. *Für eine reguläre Primzahl $p > 2$ hat die Gleichung $X^p + Y^p = Z^p$ keine ganzzahlige Lösung $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid xyz$.*

Zeigen Sie dazu der Reihe nach die folgenden Aussagen über $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Aufgabe 31.

(a) Jede $(p-1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \zeta_p, \zeta_p^2, \ldots, \zeta_p^{p-1}\}$ ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.

(b) Insbesondere ist $a_0 + a_1\zeta_p + \ldots a_{p-1}\zeta_p^{p-1}$ mit ganzen Zahlen a_i für $i = 0, \ldots, p-1$, von denen wenigstens eine verschwindet, genau dann in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ durch $N \in \mathbb{Z}$ teilbar, wenn alle a_i durch N teilbar sind.

Aufgabe 32.

Jede Einheit in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ ist Produkt aus einer p-ten Einheitswurzel und einer total reellen Einheit.

Anleitung: Sei $\varepsilon = a_0 + a_1\zeta + \ldots a_{p-2}\zeta^{p-2} = f(\zeta)$ mit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ eine Einheit und sei

$$\vartheta = \varepsilon/\bar{\varepsilon} = f(\zeta)/f(\zeta^{-1}).$$

Zeigen Sie, daß alle Konjugierten von ϑ den Absolutbetrag 1 haben. Schließen Sie aus multiplikativer Minkowskitheorie, daß ϑ eine Einheitswurzel ist, und sogar $\vartheta = \pm\zeta^{2n}$ für geeignetes n gilt. Somit ist $\rho = \varepsilon/\zeta^n$ total reell oder $i\rho$ total reell. Letzteres führt modulo $(1-\zeta)$ zum Widerspruch.

Aufgabe 33.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ liegt α^p in $\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}[\zeta_p]$.

[1] Im 'ersten Fall' meint die Zusatzbedingung $p \nmid xyz$.
[2] Eine reguläre Primzahl ist eine Primzahl p, die nicht die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ teilt.

Aufgabe 34.

Für teilerfremde ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid x + y$ und $a \not\equiv b$ aus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sind $x + \zeta^a y$ und $x + \zeta^b y$ teilerfremde Elemente von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.

Aufgabe 35.

(a) Der Satz gilt für $p = 3$ und $p = 5$.

(b) Man darf ohne Einschränkung im Widerspruchsbeweis des Satzes annehmen, daß x, y, z paarweise teilerfremd sind und $p \nmid x - y$.

Anleitung: Modulo 9 bzw. 25.

Aufgabe 36.

Sei $p > 5$ eine reguläre Primzahl und sei $x, y, z \in \mathbb{Z}$ eine Lösung die dem Satz widerspricht und gemäß Aufgabe 35(b) normiert ist. Dann gibt es $r \in \mathbb{Z}$, eine total reelle Einheit $\rho \in \mathbb{Z}[\zeta_p]^*$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$x + \zeta y \equiv \zeta^r \rho a \mod p\mathbb{Z}[\zeta_p] \tag{$*$}$$

Vergleichen Sie nun $x + \zeta y$ mit seinem Konjugierten $x + \zeta^{-1} y$ und führen Sie die Kongruenz $(*)$ zu einem Widerspruch zu $p \not| (x - y)xy$.

Anleitung: Verwenden Sie die Faktorisierung

$$\prod_{j=0}^{p-1} (x + \zeta^j y) = x^p + y^p = z^p.$$

Aus Aufgabe 34 schließen Sie, daß das Ideal $(x + \zeta^j y)$ die $p$te Potenz eines Ideals $\mathfrak{a}_j$ ist. Da p eine reguläre Primzahl ist, muß notwendigerweise $\mathfrak{a}_j$ ein Hauptideal sein. Verwenden Sie dann die Ergebnisse der Aufgaben 32 und 33. Erzwingen Sie zum Schluß den Widerspruch aus Aufgabe 31(b).

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 3.07.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---

25. Juni 2018