Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 12 26. Juni 2018

Aufgabe 45.

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit und Konvergenz, wobei a_n gegeben ist durch:

(a) e^n

(b) $5^{1/n}$

(c) $\log(3n)$

(d) $e^{2\log(n)}/n^2$

(e) $\sin(n)$

(f) $\frac{1}{e^n+1}$

(g) $n\sin(1/n)$

(h) $\frac{4n^2+3n}{2n^2+n+1}$

Aufgabe 46.

Zeigen Sie mit dem binomischen Lehrsatz, dass $e^n > n(e-1)^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie: $\lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty$.

Aufgabe 47.

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$? Mit welchem Grenzwert?

Aufgabe 48.

Zeigen Sie, dass es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ gibt, so dass $(\cos(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 49.

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass f kontrahierend ist.

(b) Bestimmen Sie den eindeutigen Fixpunkt.

(c) Sei

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

definiert als der Grenzwert der Folge $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ Was ist dieser Grenzwert?

Aufgabe 50.

Zeigen Sie, dass $\cos(x) = x$ für ein x mit $0 < x < \pi/2$ gilt.
Hinweis: Zwischenwertsatz

Aufgabe 51.

Formulieren Sie die Aussagen aus und bilden Sie logische Negation:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
(c) Die Menge $S \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine obere Schranke.

Aufgabe 52.

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gibt mit

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.
(b) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ für $x > 0$.

Aufgabe 53.

Untersuchen Sie die Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{\sin(x)}$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1 + |x|)$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2\pi\lfloor x \rfloor)$
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$

Aufgabe 54.

Zeigen Sie anhand des Einheitskreises, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$
(b) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$

Aufgabe 55.

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

(a) $\sin(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
(b) $\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Sie dürfen die Werte $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 56.

In einem Dreieck treffen sich zwei Seiten der Längen 1 und 2 im Winkel $\pi/4$. Wie lang ist die dritte Seite?

Aufgabe 57.

In einem Dreieck hat eine Seite die Länge 1 und die beiden anliegenden Winkel betragen $\pi/4$ und $\pi/3$. Wie lang sind die anderen beiden Seiten?
Sie dürfen $\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ benutzen.

Aufgabe 58.

Berechnen Sie $\sin(\pi/6)$, $\cos(\pi/6)$ und $\tan(\pi/6)$ anhand eines gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe 59.

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \log(x))x^{1/x}$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von f.

Aufgabe 60.

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie anhand des Differenzenquotienten, dass f in 0 nicht differenzierbar ist und dass $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$ gilt.

Aufgabe 61.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder begründen Sie, warum keines existiert:

(a) eine unstetige, surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) eine differenzierbare, nicht stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) eine stetige, nicht differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nicht konstant 0, mit $f(x) + f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(e) eine injektive, nicht monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(f) eine bijektive Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

(g) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in unendlich vielen Punkten nicht differenzierbar ist

(h) eine unbeschränkte stetige Funktion $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$

(i) eine unbeschränkte stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

(j) stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) < g(-1)$, $f(1) > g(1)$ und $f(x) \neq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(k) eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(l) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nicht konstant 5, mit $f(x) = 5$ für unendlich viele $x \in \mathbb{R}$

Bonusaufgabe.

Auf wie viele Weisen lässt sich die Figur mit Dominosteinen der Ausmaße 2×1 überdecken?