Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 10 12. Juni 2018

Aufgabe 37. (4 Punkte)

Sinus und Kosinus sind durch die folgenden, für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergierenden Potenzreihen gegeben:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Man kann zeigen, dass die Ableitung einer Potenzreihenfunktion durch die gliedweise abgeleitete Potenzreihe gegeben ist. Benutzen Sie das, um die Ableitungen von Sinus und Kosinus zu berechnen:

(a) $\sin'(x) = \cos(x)$

(b) $\cos'(x) = -\sin(x)$

Lösungsskizze zu Aufgabe 37:

Wir kennen die Ableitungen von Potenzfunktionen (für $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$) und kennen die Regel $(cf)' = cf'$ für Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Damit hat ein Reihenglied der Form $a_k x^k$ die Ableitung $k a_k x^{k-1}$.

(a) Das Reihenglied $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ aus der Potenzreihe des Sinus hat somit die Ableitung

$$(2n+1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Wegen $(2n+1)! = (2n+1) \cdot (2n)!$ ist dies gleich $\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. Wir erhalten

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x).$$

(b) Das Reihenglied $\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ aus der Potenzreihe des Kosinus hat für $n = 0$ die Ableitung 0 und für $n \geq 1$ die Ableitung

$$(2n) \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

Wir erhalten

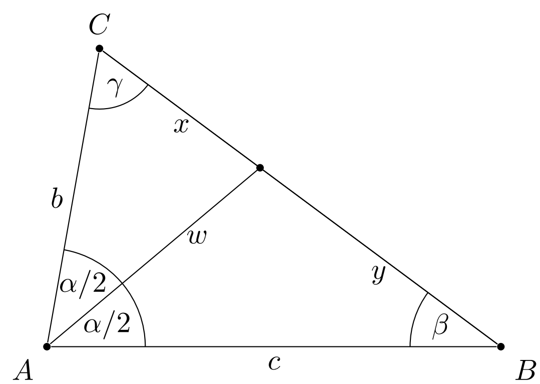
$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

Wir nehmen eine Indexverschiebung vor, so dass n von 0 (statt von 1) bis unendlich läuft, und ersetzen dafür n durch $n+1$ in jedem Reihenglied. Dann ergibt sich

$$\cos'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x).$$

Aufgabe 38. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Winkelhalbierende im Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Sei dazu ABC ein Dreieck und sei w die Winkelhalbierende bei A, welche die gegenüberliegende Seite in Teilabschnitte x und y teile.



Zeigen Sie mit Hilfe des Sinussatzes:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 38:

Der Sinussatz angewendet auf jedes der Seitenpaare (x, w), (y, w) und (b, c) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{x}{w} &= \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\gamma)}, \\ \frac{y}{w} &= \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta)}, \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}. \end{aligned}$$

Wenn wir die erste durch die zweite Gleichung teilen, erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\gamma)}}{\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta)}} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{c}.$$

Aufgabe 39. (4 Punkte)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie durch Betrachtung des Differenzenquotienten: Die Funktion $f^2 : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)^2$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$(f^2)' = 2f'f.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 39:

Für $x \in (a,b)$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$, $x+h \in (a,b)$, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} &= \frac{(f(x+h) - f(x))(f(x+h) + f(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot (f(x+h) + f(x)). \end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \to 0$ konvergiert der erste Faktor gegen $f'(x)$. Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig und damit konvergiert $f(x+h) \to f(x)$. Somit konvergiert der Differenzenquotient gegen

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} = f'(x) \cdot (f(x) + f(x)) = 2f'(x)f(x).$$

Also ist f^2 differenzierbar mit Ableitung $\left(f^2\right)' = 2f'f$.

Aufgabe 40. (6 Punkte)

(a) Finden Sie ein Beispiel für eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x \cdot |x|$. Berechnen Sie die Ableitung f' von f.

(c) Untersuchen Sie f' auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösungsskizze zu Aufgabe 40:

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = |x|$. Sie ist stetig, wie in Aufgabe 23(c) gesehen. Wir zeigen, dass sie in 0 nicht differenzierbar ist. Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Für $h > 0$ ist $|h| = h$, also der Differenzenquotient gleich 1; für $h < 0$ ist $|h| = -h$ und der Differenzenquotient ist gleich -1. Die zwei Nullfolgen $h_n = \frac{1}{n}$ und $h'_n = -\frac{1}{n}$ liefern also verschiedene Grenzwerte für den Differenzenquotienten, nämlich 1 und -1. Damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

nicht, d.h. g ist in 0 nicht differenzierbar.

(b) Sei zunächst $x > 0$, so dass $f(x) = x^2$ gilt. Für $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, hinreichend nahe an 0, ist auch $x + h > 0$. Für den Differenzenquotienten gilt dann

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Dies ist der gleiche Differenzenquotient wie für die Funktion $x \mapsto x^2$; er konvergiert gegen $2x$. Also gilt $f'(x) = 2x$ für $x > 0$. Ist andererseits $x < 0$, so gilt $f(x) = -x^2$ und für h hinreichend nahe an 0 ist auch $x + h < 0$. Der Differenzenquotient ist dann der gleiche wie für die Funktion $x \mapsto -x^2$, also gilt $f(x) = -2x$ für $x < 0$. Es fehlt noch der Fall $x = 0$. Es gilt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \cdot |h| - 0 \cdot |0|}{h} = |h|,$$

was für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert; somit gilt $f'(0) = 0$. Zusammengefasst erhalten wir für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2|x|.$$

(c) Bis auf den Faktor 2 handelt es sich bei f' um die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, die wir in (a) untersucht haben. Der Faktor 2 ändert nichts an den Eigenschaften der Stetigkeit und Differenzierbarkeit, also ist auch f' stetig, aber nicht differenzierbar.

Bonusaufgabe.

Am Ende der Gruppenphase einer Fußballweltmeisterschaft liegt folgende Punktetabelle vor:

	Tore	Gegentore	Punkte
Deutschland	7	1	9
Schweden	3	3	4
Mexiko	2	3	4
Südkorea	1	6	0

Jede der vier Mannschaften hat ein Spiel gegen jede andere gespielt. Ein Sieg gibt 3 Punkte, ein Unentschieden 1, eine Niederlage 0. Das erste Spiel gewann Deutschland gegen Mexiko mit einem souveränen 3 : 0. Wie gingen die anderen Spiele aus?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **19. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`