
Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 13:

Aufgabe 1: Sei V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum. Dann ist U insbesondere eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(V, +)$. Deshalb können wir die Quotientengruppe V/U bilden. Zeige, dass man auf V/U genau eine skalare Multiplikation über dem Körper K definieren kann, die V/U zu einem K -Vektorraum macht, so dass die kanonische Projektion

$$p: V \rightarrow V/U$$
$$v \mapsto [v]$$

eine lineare Abbildung ist.

V/U heisst der **Quotientenvektorraum** von V nach U .

Aufgabe 2: Zeige, dass wenn V endlich erzeugt ist, auch V/U endlich erzeugt ist, und dass

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

ist.

Aufgabe 3: Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und U ein Unterraum. Zeige, dass es einen Unterraum W gibt, so dass $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$ ist.

Hinweis: Wähle Basis von U und ergänze sie zu Basis von V .

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine 2×2 -Matrix über K . Ein Vektor $0 \neq v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ heisst **Eigenvektor** von A wenn es ein $\lambda \in K$ gibt, so dass

$$Av = \lambda v$$

ist. λ heisst dann ein **Eigenwert** zum Eigenvektor v . Zeige, dass A genau dann einen Eigenvektor v und damit Eigenwert λ hat, wenn λ Lösung der Gleichung $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ ist.

Hinweis: Zeige:

a) $Av = \lambda v$ genau dann, wenn

$$(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix})v = 0$$

ist. Also hat A einen Eigenvektor genau dann, wenn es λ gibt, so dass diese Gleichung eine Lösung $v \neq 0$ hat.

b) Die Gleichung

$$(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix})v = 0$$

hat genau dann **nur** die Lösung $v = 0$, wenn der Kern der durch

$$A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung nur aus dem Nullvektor besteht oder äquivalent, wenn diese Abbildung injektiv ist. Nach dem Satz aus der Vorlesung vom 27.6. ist die Dimension des Bildes, also der Rang der Abbildung, dann gleich 2, also ist die Abbildung dann auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In einer früheren Übung haben wir gezeigt, dass eine solche (2×2) -Matrix einen Isomorphismus genau dann liefert, wenn $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc \neq 0$ ist. Schliesse daraus die Behauptung.