Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 11 19. Juni 2018

Aufgabe 41. (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(x)$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sin(x)}$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$
(Per Konvention ist $a^{b^c} = a^{(b^c)}$, nicht $(a^b)^c$.)

Lösungsskizze zu Aufgabe 41:

(a) Wir benutzen die Kettenregel für die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \mapsto x - 1$. Erstere hat Ableitung $-\frac{1}{x^2}$, während die innere Ableitung $= 1$ ist. Damit ist
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

(b) Nach Produktregel gilt
$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x\cos'(x) = \cos(x) - x\sin(x).$$

(c) Nach der Kettenregel und mit $(e^x)' = e^x$ gilt
$$f'(x) = (-\sin'(x))e^{-\sin(x)} = -\cos(x)e^{-\sin(x)}.$$

(d) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ hat die Ableitung
$$(\sqrt{x})' = \tfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Mit zweifacher Anwendung der Kettenregel folgt
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}} \cdot (1 + e^{x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}} \cdot 2xe^{x^2} = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}}.$$

Aufgabe 42. (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$
Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f in x, also $f^{(0)}(x) = f(x)$ und $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ für $n \geq 1$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(0)$ und $f'(x)$ für $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} q_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

wobei q_n ein Polynom ist, also von der Form $q_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_d t^d$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $p \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{x \to 0} x^{-p} e^{-1/x^2} = 0.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 42:

(a) Für die Ableitung $f'(0)$ betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = h^{-1}e^{-1/h^2}.$$

Gemäß dem Hinweis konvergiert er für $h \to 0$ gegen 0, also ist $f'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ berechnen wir mit der Kettenregel und der Regel $(x^a)' = ax^{a-1}$

$$f'(x) = (-1/x^2)'e^{-1/x^2} = (-x^{-2})'e^{-1/x^2} = -(-2)x^{-3}e^{-1/x^2} = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.$$

(b) Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar; das Polynom ist einfach $q_0(t) = 1$. Alternativ kann man (a) benutzen und $n = 1$ als Induktionsanfang wählen; in diesem Fall ist $q_1(t) = 2t^3$. Angenommen, die Aussage gilt für $n - 1$ mit dem Polynom $q_{n-1}(t) = a_0 + \cdots + a_d t^d$. Der Differenzenquotient für die Berechnung von $f^{(n)}(0)$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} &= \frac{f^{(n-1)}(h)}{h} && (f^{(n-1)}(0) = 0 \text{ nach IV}) \\
&= \frac{1}{h}q_{n-1}\Big(\frac{1}{h}\Big)e^{-1/h^2} && (\text{nach IV}) \\
&= \frac{1}{h}(a_0 + a_1 h^{-1} + \ldots + a_d h^{-d})e^{-1/h^2} \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i h^{-i-1} e^{-1/h^2}.
\end{aligned}$$

Gemäß dem Hinweis konvergieren alle Summanden und somit die ganze Summe für $h \to 0$ gegen 0, also ist $f^{(n)}(0) = 0$.

Für $x \neq 0$ berechnen wir mit der Produkt- und Kettenregel und unter Wiederverwendung der Rechnung aus (a)

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)})'(x) \\
&= \Big(q_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2}\Big)' \\
&= \Big(q_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)' e^{-1/x^2} + q_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)(e^{-1/x^2})' \\
&= -\frac{1}{x^2}q'_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2} + q_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \\
&= \Big(-\frac{1}{x^2}q'_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big) + \frac{2}{x^3}q_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)e^{-1/x^2}.
\end{aligned}$$

Dies ist gleich $q_n(1/x)e^{-1/x^2}$ mit

$$q_n(t) = -t^2 q'_{n-1}(t) + 2t^3 q_{n-1}(t),$$

was ein Polynom ist, da q_{n-1} und somit auch dessen Ableitung q'_{n-1} Polynome sind. Damit ist $f^{(n)}(x)$ wieder von der behaupteten Form.

Aufgabe 43. (3 Punkte)

Die Tangensfunktion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Die Arkustangensfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ist als Umkehrfunktion des Tangens definiert. Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 43:

(a) Nach der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x).\end{aligned}$$

(b) Wir begründen kurz die Existenz der Umkehrfunktion. Aus (a) folgt, dass $\tan'(x) > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt. Dies impliziert, dass der Tangens streng monoton steigend ist, so dass die Umkehrfunktion $\arctan : D \to (-\pi/2, \pi/2)$ existiert und überall differenzierbar ist, wobei $D = \tan((-\pi/2, \pi/2))$ ist. Für $x \to \pm\pi/2$ in $(-\pi/2, \pi/2)$ ist $\cos(x)$ positiv und konvergiert gegen $\cos(\pm\pi/2) = 0$, während $\sin(x)$ gegen $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$ konvergiert. Daraus folgt $\lim_{x\to-\pi/2}\tan(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\pi/2}\tan(x) = +\infty$ und somit $D = \mathbb{R}$.
Sei nun $y \in \mathbb{R}$ und sei $x = \arctan(y)$. Es gilt $\tan'(x) \neq 0$, also ist arctan in y differenzierbar und nach der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Aufgabe 44. (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^x$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f durch

$$f'(x) = (1 + \log(x))x^x$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von f.

Lösungsskizze zu Aufgabe 44:

(a) Wir schreiben die Funktion als

$$f(x) = x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log(x)}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \log(x))' e^{x \log(x)} && \text{(Kettenregel)} \\ &= (x \log'(x) + \log(x))x^x && \text{(Produktregel)} \\ &= (1 + \log(x))x^x. && (\log'(x) = 1/x) \end{aligned}$$

(b) Wenn f bei x_0 ein Extremum besitzt, gilt dort $f'(x_0) = 0$. Wir bestimmen also die Nullstellen von f'. Wegen $x^x > 0$ für alle $x > 0$ ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $1 + \log(x) = 0$ gilt, also $\log(x) = -1$, also $x = e^{-1}$. Somit ist $x_0 = 1/e$ die einzige Nullstelle von f' und somit das einzige mögliche Extremum. Der Wert von f beträgt dort

$$f(1/e) = (1/e)^{1/e} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}.$$

Für $x < 1/e$ gilt $\log(x) < -1$ und somit $f'(x) < 0$; für $x > 1/e$ gilt $\log(x) > -1$ und somit $f'(x) > 0$. Daraus folgt, dass es sich tatsächlich um ein Extremum, nämlich ein Minimum handelt.

Bonusaufgabe.

Ein Forscher entdeckt eine Inselgruppe. Auf jeder der drei Inseln leben 100 Personen. Jeder Inselbewohner sagt entweder immer die Wahrheit oder lügt immer. Der Forscher betritt die erste Insel und erkundigt sich nach der Anzahl der Lügner. Der erste Einwohner sagt: „Es lebt genau ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben genau zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben genau 100 Lügner auf dieser Insel.“

Auf der zweiten Insel befragt der Forscher ebenfalls die Einwohner. Der erste sagt: „Es lebt mindestens ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben mindestens zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben mindestens 100 Lügner auf dieser Insel.“

Dann befragt der Forscher die Einwohner der dritten Insel. Der erste sagt: „Es leben weniger als ein Lügner auf dieser Insel“, der zweite sagt: „Es leben weniger als zwei Lügner auf dieser Insel“ usw. bis der letzte sagt: „Es leben weniger als 100 Lügner auf dieser Insel.“

Welche Schlüsse zieht der Forscher über die Anzahl der Lügner auf den Inseln?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **26. Juni 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`