Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

# Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

**Übungsblatt 12** 26. Juni 2018

**Aufgabe 45.**

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit und Konvergenz, wobei $a_n$ gegeben ist durch:

(a) $e^n$

(b) $5^{1/n}$

(c) $\log(3n)$

(d) $e^{2\log(n)}/n^2$

(e) $\sin(n)$

(f) $\frac{1}{e^n+1}$

(g) $n\sin(1/n)$

(h) $\frac{4n^2+3n}{2n^2+n+1}$

**Lösungsskizze zu Aufgabe 45:**

| | $e^n$ | $5^{1/n}$ | $\log(3n)$ | $e^{2\log(n)}/n^2$ | $\sin(n)$ | $\frac{1}{e^n+1}$ | $n\sin(1/n)$ | $\frac{4n^2+3n}{2n^2+n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| beschränkt | – | ja | – | ja | ja | ja | ja | ja |
| Grenzwert | – | 1 | – | 1 | – | 0 | 1 | 2 |

(a) Für beliebiges $S > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \log(S)$ und dann gilt $e^n > S$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$, insbesondere ist die Folge unbeschränkt und damit auch nicht konvergent.

(b) Für $n \to \infty$ konvergiert $1/n \to 0$. Da die Funktion $x \mapsto 5^x$ stetig ist, gilt somit $\lim_{n\to\infty} 5^{1/n} = 5^0 = 1$. Da die Folge konvergiert, ist sie auch beschränkt.

(c) Für beliebiges $S > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{3}e^S$. Für $n \geq n_0$ gilt dann, da log streng monoton wachsend ist, $\log(3n) > \log(3n_0) = \log(e^S) = S$, also gilt $\lim_{n\to\infty} \log(3n) = \infty$. Insbesondere ist die Folge unbeschränkt und damit nicht konvergent.

(d) Mit den Rechenregeln für Potenzen gilt $e^{2\log(n)} = \left(e^{\log(n)}\right)^2 = n^2$, also sind die Folgenglieder $e^{2\log(n)}/n^2$ alle gleich 1. Die konstante Folge ist beschränkt und konvergiert gegen 1.

(e) Der Sinus nimmt nur Werte zwischen $-1$ und 1 an, somit ist die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Sei $\varepsilon$ irgendeine Zahl mit $0 < \varepsilon < \frac{\pi-1}{2}$, zum Beispiel $\varepsilon = 1$. Dann hat das Intervall $I = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ die Länge $\pi - 2\varepsilon > 1$. Jedes der verschobenen Intervalle $I + 2\pi k = [\varepsilon + 2\pi k, \pi - \varepsilon + 2\pi k]$ mit $k \in \mathbb{N}$ enthält daher mindestens eine natürliche Zahl. An den Intervallgrenzen gilt $\sin(\varepsilon + 2\pi k) = \sin(\varepsilon) > 0$ und $\sin(\pi - \varepsilon + 2\pi k) = \sin(\pi - \varepsilon) = \sin(\varepsilon) > 0$, während der Sinus im Inneren des Intervalls größer ist. Sei $a := \sin(\varepsilon) > 0$, dann gilt also $\sin(n) \geq a$ für unendlich viele natürliche Zahlen $n$. Betrachtet man analog das Intervall $J = [\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, dann gilt $\sin(\pi+\varepsilon) = -\sin(\varepsilon) = -a < 0$ und $\sin(2\pi-\varepsilon) = \sin(\pi+\varepsilon) = -a < 0$, während der Sinus im Inneren des Intervalls kleiner ist. Es gilt also auch $\sin(n) \leq -a$ für unendlich viele natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, somit konvergiert die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

(f) Es gilt $\lim_{n\to\infty} e^n+1 = \infty$ (siehe (a)) und damit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n+1} = 0$ (vgl. Aufgabe 4).

(g) Es gilt $n\sin(1/n) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}$. Nach Vorlesung gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Da $1/n$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1.$$

(h) Durch Kürzen von $n^2$ erhalten wir

$$\frac{4n^2+3n}{2n^2+n+1} = \frac{4+3\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Der Zähler konvergiert gegen 4, der Nenner gegen 2, damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{2n^2+n+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

**Aufgabe 46.**

Zeigen Sie mit dem binomischen Lehrsatz, dass $e^n > n(e-1)^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie: $\lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 46:**

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$e^n = (1+(e-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e-1)^{n-k}.$$

Alle $n+1$ Summanden sind $> 0$. Behalten wir nur den Summanden für $k=1$, erhalten wir

$$e^n > \binom{n}{1}(e-1)^{n-1} = n(e-1)^{n-1}.$$

Wegen $e-1>1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^n/n \geq \lim_{n\to\infty} (e-1)^n = \infty,$$

also $\lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty$.

**Aufgabe 47.**

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$? Mit welchem Grenzwert?

**Lösungsskizze zu Aufgabe 47:**

Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n$, es handelt sich also um die geometrische Reihe mit Parameter $q^2$. Wenn $|q^2| < 1$ ist, also $|q| < 1$, konvergiert diese gegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1-q^2}.$$

Ist hingegen $|q| \geq 1$, bilden die Reihenglieder wegen $|q^{2n}| \geq 1$ keine Nullfolge und die Reihe konvergiert nicht.

**Aufgabe 48.**

Zeigen Sie, dass es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ gibt, so dass $(\cos(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 48:**

Da der Kosinus nur Werte zwischen $-1$ und $1$ annimmt, ist die Folge $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(\cos(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \dots$

**Aufgabe 49.**

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ kontrahierend ist.

(b) Bestimmen Sie den eindeutigen Fixpunkt.

(c) Sei

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$$

definiert als der Grenzwert der Folge $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ Was ist dieser Grenzwert?

**Lösungsskizze zu Aufgabe 49:**

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erhalten wir durch Erweitern mit $\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}$ und der dritten binomischen Formel

$$|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}| = \left|\frac{(2+x)-(2+y)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}|x-y| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|,$$

wobei die Ungleichung aus $\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y} \geq \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ folgt. Wegen $\frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$ ist $f$ kontrahierend.

(b) Aus $x = \sqrt{2+x}$ folgt $x^2 = 2+x$, also ist $x$ Nullstelle von $x^2 - x - 2$. Mit Mitternachtsformel folgt $x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$. Da außerdem $x \geq 0$ ist, folgt $x = \frac{1+3}{2} = 2$. Dies ist der eindeutige Fixpunkt.

(c) Die Folge entsteht durch iteriertes Anwenden der Funktion $f$, genauer gilt $x_0 = \sqrt{2}$ und $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} = f(x_n)$ für $n \geq 0$. Nach Vorlesung konvergiert diese Folge gegen den eindeutigen Fixpunkt von $f$, also gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}} = 2.$$

**Aufgabe 50.**

Zeigen Sie, dass $\cos(x) = x$ für ein $x$ mit $0 < x < \pi/2$ gilt.
*Hinweis: Zwischenwertsatz*

**Lösungsskizze zu Aufgabe 50:**

Wir betrachten die Funktion $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - x$. Als Differenz zweier stetiger Funktionen ist $f$ stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0, \\ f(\pi/2) &= \cos(\pi/2) - \pi/2 = -1 - \pi/2 < 0. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x$ mit $0 < x < \pi/2$, so dass $f(x) = 0$, also $\cos(x) = x$ gilt.

**Aufgabe 51.**

Formulieren Sie die Aussagen aus und bilden Sie logische Negation:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) Die Menge $S \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine obere Schranke.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 51:**

(a) *Aussage:* Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

*Negation:* Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$ existiert.

(b) *Aussage:* Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

*Negation:* Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert.

(c) *Aussage:* Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq a$ für alle $x \in S$ gilt.

*Negation:* Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in S$ mit $x > a$.

**Aufgabe 52.**

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gibt mit

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

(b) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ für $x > 0$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 52:**

Ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(a) Angenommen, es gilt $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, also müsste $f(\frac{1}{n}) = n$ gegen $f(0)$ konvergieren, aber die Folge konvergiert nicht.

(b) Angenommen, es gilt $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ für $x > 0$. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi n},$$
$$y_n = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi n},$$

konvergieren gegen 0, also müssten $f(x_n) = \sin(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n)$ und $f(y_n) = \sin(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n)$ beide gegen $f(0)$ konvergieren. Aber es gilt

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + 2\pi n) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi) = 1,$$
$$\sin(\tfrac{3}{2}\pi + 2\pi n) = \sin(\tfrac{3}{2}\pi) = -1,$$

die beiden Folgen haben also keinen gemeinsamen Grenzwert.

**Aufgabe 53.**

Untersuchen Sie die Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{\sin(x)}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1 + |x|)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2\pi\lfloor x \rfloor)$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$

**Lösungsskizze zu Aufgabe 53:**

(a) Die Funktion ist in keinem Punkt stetig: Sei zunächst $x \in \mathbb{Q}$. Für jedes $\delta > 0$ existieren irrationale Zahlen $y$ mit $|x - y| < \delta$, etwa $y = x + \sqrt{2}/n$ für hinreichend große $n$ (da die Folge gegen $x$ konvergiert). Dieses $y$ ist irrational, sonst wäre $\sqrt{2} = n(y - x)$ rational. Es gilt $f(x) = 1$, aber $f(y) = 0$. Also existiert für beliebiges $\delta > 0$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| = 1 \geq 1$. Damit ist $f$ nicht stetig in $x$. Ist andererseits $x \in \mathbb{R}$ irrational, existieren für jedes $\delta > 0$ rationale Zahlen $y$ mit $|x - y| < \delta$, da $x$ etwa durch Dezimalbrüche beliebig angenähert werden kann. Dann gilt $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Wie oben folgt, dass $f$ in $x$ nicht stetig ist.

(b) Die Funktion stetig als Hintereinanderausführung der stetigen Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto 3^x$.

(c) Die Funktion ist stetig: Es handelt sich um die Hintereinanderausführung der Funktionen $x \mapsto 1 + |x|$ und $x \mapsto \log(x)$. Beide sind stetig, da der Absolutbetrag und der Logarithmus stetig sind.

(d) Die Funktion ist stetig: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ eine ganze Zahl (definiert als die größte ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq x$). Da der Kosinus $2\pi$-periodisch ist, gilt $\cos(2\pi a) = \cos(0) = 1$ für alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}$. Also ist $f$ die konstante Funktion $f(x) = 1$ und damit stetig.

(e) Die Funktion ist stetig in allen $x \neq 0$ und unstetig in 0: Wäre sie stetig in 0, würde $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0) = 0$ gelten. Es gilt aber $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty$ nach Aufgabe 46. Ist $x < 0$, dann gilt auch $y < 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, die hinreichend nahe an $x$ sind. In der Nähe von $x$ ist also $f$ konstant 0 und damit stetig. Für $x > 0$ ist $f(x) = xe^{1/x}$; dies ist das Produkt der Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto e^{1/x}$. Da $x \mapsto 1/x$ und $x \mapsto e^x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig sind, ist auch die Hintereinanderausführung $x \mapsto e^{1/x}$ stetig und damit auch $f$ als Produkt zweier stetiger Funktionen.

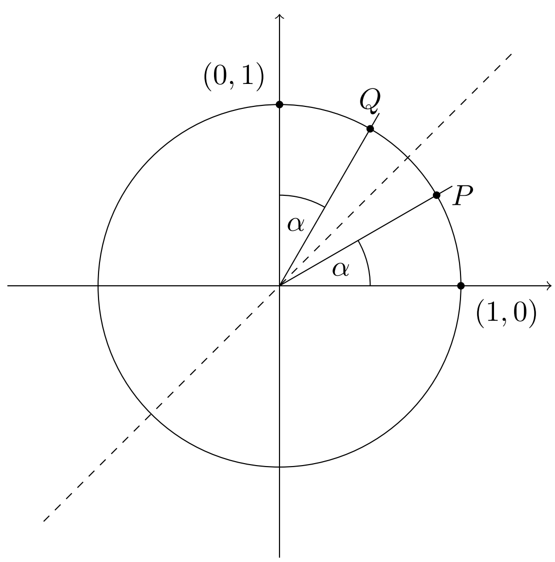
**Aufgabe 54.**

Zeigen Sie anhand des Einheitskreises, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$
(b) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$

**Lösungsskizze zu Aufgabe 54:**

Sei $P$ der Punkt, den man erhält, wenn man von $(1, 0)$ ausgehend das Bogenmaß $\alpha$ gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis abläuft (für negatives $\alpha$ läuft man im Uhrzeigersinn). Dann ist $P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ nach Definition von Kosinus und Sinus. Sei $Q$ der Punkt, den man erhält, wenn man das Bogenmaß $\frac{\pi}{2} - \alpha$ abläuft, so dass $Q = (\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha))$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass man von $(0, 1) = (\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2}))$ ausgehend das Bogenmaß $\alpha$ in der entgegengesetzten Richtung läuft. Man erkennt, dass $Q$ sich durch Spiegelung von $P$ an der Diagonalen $x = y$ ergibt, also durch Vertauschung von $x$- und $y$-Koordinaten, so dass $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$ und $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$ gilt.




**Aufgabe 55.**

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

(a) $\sin(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

(b) $\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Sie dürfen die Werte $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als bekannt voraussetzen.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 55:**

Wählt man $\alpha = \beta = \pi/8$ im Additionstheorem

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

erhält man

$$\cos(\pi/4) = \cos^2(\pi/8) - \sin^2(\pi/8).$$

Kombiniert mit $\cos^2(\pi/8) + \sin^2(\pi/8) = 1$ liefert das

$$\begin{aligned} \cos(\pi/4) &= 1 - 2\sin^2(\pi/8), \\ \cos(\pi/4) &= 2\cos^2(\pi/8) - 1. \end{aligned}$$

Mit $\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin^2(\pi/8) &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos(\pi/4)) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \\ \cos^2(\pi/8) &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos(\pi/4)) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Da $\sin(\pi/8)$ und $\cos(\pi/8)$ beide positiv sind (der entsprechende Punkt auf dem Einheitskreis liegt im ersten Quadranten), finden wir durch Wurzelziehen

$$\begin{aligned} \sin(\pi/8) &= \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \\ \cos(\pi/8) &= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 56.**

In einem Dreieck treffen sich zwei Seiten der Längen 1 und 2 im Winkel $\pi/4$. Wie lang ist die dritte Seite?

**Lösungsskizze zu Aufgabe 56:**

Seien $a = 1$, $b = 2$ und sei $c$ die Länge der dritten Seite. Nach dem Kosinussatz gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi/4) = 1 + 4 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2},$$

somit hat die dritte Seite die Länge $c = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.

**Aufgabe 57.**

In einem Dreieck hat eine Seite die Länge 1 und die beiden anliegenden Winkel betragen $\pi/4$ und $\pi/3$. Wie lang sind die anderen beiden Seiten?
Sie dürfen $\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ benutzen.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 57:**

Seien die Seiten und Winkel im Dreieck wie üblich mit $a, b, c$ und $\alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet. Es gelte $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$ und $c = 1$. Gesucht sind $a$ und $b$. Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/3)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Nach dem Kosinussatz gilt $b^2 = a^2 + 1^2 - 2a\cos(\beta)$. Setzen wir $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$ und $\cos(\alpha) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ ein, ergibt sich

$$\tfrac{3}{2}a^2 = a^2 + 1 - 2a \cdot \tfrac{1}{2}$$

und damit

$$a^2 + 2a - 2 = 0.$$

Die $pq$-Formel liefert

$$a = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Da $a > 0$ ist, muss $a = -1 + \sqrt{3}$ gelten. Aus $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$ folgt dann

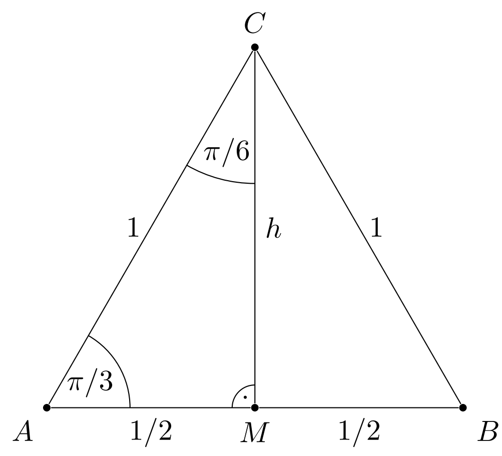
$$b = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot (-1 + \sqrt{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \tfrac{3}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{6} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,.$$

**Aufgabe 58.**

Berechnen Sie $\sin(\pi/6)$, $\cos(\pi/6)$ und $\tan(\pi/6)$ anhand eines gleichseitigen Dreiecks.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 58:**

Wir betrachten folgendes gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1:




Die Winkel an den Ecken betragen alle $\pi/3$, da sie gleich groß sind und sich zu $\pi$ addieren. Der Winkel $\angle ACM$ beträgt nach dem Winkelsummensatz $\pi - \pi/3 - \pi/2 = \pi/6$. Die Höhe beträgt

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

nach dem Satz des Pythagoras. Wir bestimmen Sinus, Kosinus und Tangens anhand des rechtwinkligen Dreiecks $ACM$:

$$\sin(\pi/6) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \tfrac{1}{2},$$
$$\cos(\pi/6) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\tan(\pi/6) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

**Aufgabe 59.**

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von $f$ durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \log(x))x^{1/x}$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f$.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 59:**

(a) Es gilt

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\log\left(x^{1/x}\right)} = e^{\frac{1}{x}\log(x)}.$$

Damit berechnen wir $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\tfrac{1}{x}\log(x)\right)' e^{\frac{1}{x}\log(x)} && (\text{Kettenregel, } (e^x)' = e^x)\\ &= \left(\tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2}\log(x)\right)x^{1/x} && (\text{Produktregel, } \log'(x) = \tfrac{1}{x})\\ &= \tfrac{1}{x^2}(1 - \log(x))x^{1/x}. \end{aligned}$$

(b) Wenn $f$ bei $x_0$ ein Extremum hat, gilt $f'(x_0) = 0$. Wir bestimmen also die Nullstellen von $f'$. Für alle $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^2} > 0$ und $x^{1/x} > 0$. Somit gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $1 - \log(x) = 0$, also $x = e$ gilt. Das einzig mögliche Extremum von $f$ liegt somit bei $e$, wo $f$ den Wert $f(e) = e^{1/e} = \sqrt[e]{e}$ hat. Für $x < e$ gilt $\log(x) < 1$, also $1 - \log(x) > 0$ und damit $f'(x) > 0$. Für $x > e$ gilt entsprechend $f'(x) < 0$. Die Funktion $f$ ist also steigend für $x < e$ und fallend für $x > e$. Somit hat $f$ bei $e$ ein Maximum.

**Aufgabe 60.**

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie anhand des Differenzenquotienten, dass $f$ in 0 nicht differenzierbar ist und dass $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$ gilt.

**Lösungsskizze zu Aufgabe 60:**

Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

durch Erweitern mit $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ und Benutzen der dritten binomischen Formel. Im Fall $x=0$ ist dies gleich $\frac{1}{\sqrt{h}}$, was für $h\to 0$ nicht konvergiert, da zum Beispiel die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, während $\frac{1}{\sqrt{1/n}}=\sqrt{n}$ nicht konvergiert. Also ist $f$ in 0 nicht differenzierbar. Für $x>0$ gilt $\lim_{h\to 0}\sqrt{x+h}+\sqrt{x}=\sqrt{x+0}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$ mittels der Stetigkeit von $x\mapsto\sqrt{x}$. Damit gilt für $x>0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Aufgabe 61.**

Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder begründen Sie, warum keines existiert:

(a) eine unstetige, surjektive Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(b) eine differenzierbare, nicht stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(c) eine stetige, nicht differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(d) eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nicht konstant 0, mit $f(x)+f'(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

(e) eine injektive, nicht monotone Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(f) eine bijektive Funktion $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$

(g) eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die in unendlich vielen Punkten nicht differenzierbar ist

(h) eine unbeschränkte stetige Funktion $f:[0,1[\,\to\mathbb{R}$

(i) eine unbeschränkte stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

(j) stetige Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(-1)<g(-1)$, $f(1)>g(1)$ und $f(x)\neq g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$

(k) eine Funktion $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ mit $f(xy)=f(x)+f(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$

(l) eine stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nicht konstant 5, mit $f(x)=5$ für unendlich viele $x\in\mathbb{R}$

**Lösungsskizze zu Aufgabe 61:**

(a) Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x\le 0,\\ x-1 & \text{für } x>0.\end{cases}$$

Die Funktion ist surjektiv: Für $y\le 0$ gilt $f(y)=y$, also ist $y$ ein Urbild; für $y>0$ gilt $f(y+1)=(y+1)-1=y$, also ist $y+1$ ein Urbild. Die Funktion ist nicht stetig, da $\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-1=-1\neq 0=f(0)$ gilt.

(b) existiert nicht: Nach Vorlesung ist jede differenzierbare Funktion stetig.

(c) Ein Beispiel ist $f(x) = |x|$. Die Funktion ist stetig (vgl. Aufgabe 23 (c)), aber nicht differenzierbar (vgl. Aufgabe 40).

(d) Die Funktion $f(x) = e^{-x}$ erfüllt $f'(x) = -e^{-x} = -f(x)$, also $f(x) + f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie ist nicht konstant 0, zum Beispiel gilt $f(0) = e^{-0} = 1$.

(e) Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Sie ist injektiv: Es gilt $f(x) = 0$ nur, wenn $x = 0$ ist. Gilt also $f(x) = f(y) = 0$, dann folgt $x = y = 0$. Gilt hingegen $f(x) = f(y) \neq 0$, dann folgt $x, y \neq 0$, somit $\frac{1}{x} = f(x) = f(y) = \frac{1}{y}$ und damit $x = y$. Die Funktion ist nicht monoton, denn es gilt $0 < 1 < 2$, aber $f(0) = 0 < f(1) = 1 > f(2) = \frac{1}{2}$.
Ein weiteres Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f) Die Funktion $f(x) = \log(x)$ ist eine Bijektion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion $x \mapsto e^x$.

(g) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

aus Aufgabe 53 (a) ist in keinem Punkt stetig, somit auch in keinem Punkt differenzierbar.

(h) Die Funktion $f : [0,1[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, ist ein Beispiel: Sie ist stetig, da $x \mapsto 1-x$ stetig ist. Sie ist unbeschränkt, denn für beliebiges $a \geq 1$ ist $1 - \frac{1}{a} \in [0,1[$ mit $f(1 - \frac{1}{a}) = a$.

(i) existiert nicht: Nach Vorlesung (Satz 2.9) ist jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkt.

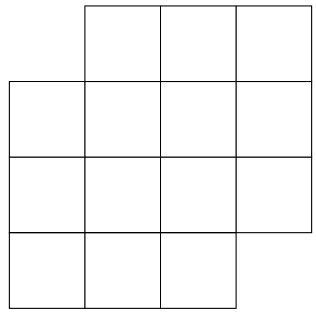
(j) existiert nicht: Angenommen, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig mit $f(-1) < g(-1)$ und $f(1) > g(1)$. Dann ist die Funktion $h(x) := f(x) - g(x)$ auch stetig und erfüllt $h(-1) < 0$ und $h(1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $x \in [-1, 1]$ mit $h(x) = 0$, also $f(x) = g(x)$. Es kann also nicht $f(x) \neq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

(k) existiert nicht: Angenommen, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine Funktion mit $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Mit $x = y = 1$ folgt $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, also $f(1) = 0$, im Widerspruch dazu, dass $f$ nach $\mathbb{R}_{>0}$ abbildet. (Eine Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit der genannten Eigenschaft, neben der konstanten Nullabbildung, existiert hingegen: der Logarithmus.)

(l) Die Funktion $f(x) = 5 + \sin(x)$ ist ein Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(n\pi) = 0$, also $f(n\pi) = 5$. Die Funktion ist nicht konstant 5, da etwa $f(\frac{\pi}{2}) = 5 + \sin(\frac{\pi}{2}) = 5 + 1 = 6$ gilt.

**Bonusaufgabe.**

Auf wie viele Weisen lässt sich die Figur mit Dominosteinen der Ausmaße $2 \times 1$ überdecken?



---

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`