Algebraische Zahlentheorie

Blatt 9 — 3.07.2018

Aufgabe 37.

Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Zeigen sie die Äquivalenz der Aussagen:

(a) Die Idealklassengruppe $\mathrm{Cl}(A)$ von A ist eine Torsionsgruppe.

(b) Jeder Ring B mit $A \subset B \subset K$ ist die Lokalisierung $B = S^{-1}A$ von A an einer geeigneten Menge S.

Aufgabe 38. (Bewertungen des rationalen Funktionenkörpers)

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $k(x)$ der rationale Funktionenkörper. Bestimmen Sie alle diskreten k-Bewertungen v von $k(x)$, d.h., $v(a) = 0$ für alle $a \in k^\times$.

Aufgabe 39.

Sei $R_0 \subseteq R$ ein Unterring eines diskreten Bewertungsrings R mit $\mathrm{Quot}(R_0) = K = \mathrm{Quot}(R)$. Es bezeichne $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ die Bewertung und $P := v(R_0 \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $P \subseteq \mathbb{N}_0$ ist ein Monoid: $0 \in P$ und wenn $x, y \in P$, dann $x + y \in P$.

(b) Es gibt ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $n \in P$.

Aufgabe 40. (Conductor)

Seien $R_0 \subseteq R$ Ringe. Wir betrachten R als R_0-Modul. Zeigen Sie:

(a) Der Annullator des Quotienten R/R_0 als R_0-Modul, a priori das folgende Ideal

$$\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_{R_0}(R/R_0) = \{f \in R_0 \ ; \ fx \in R_0 \ \forall x \in R\} \subseteq R_0,$$

ist sogar ein Ideal von R.

(b) Jedes Ideal von R_0, das auch ein Ideal von R ist, ist in $\mathfrak{c}$ enthalten.

(c) Seien $R_0 \subseteq R$ nun Integritätsringe mit $\mathrm{Quot}(R_0) = K = \mathrm{Quot}(R)$, so daß R ein endlich erzeugter R_0-Modul ist. Dann ist $\mathfrak{c} \neq (0)$.

Aufgabe 41. (Eine Ordnung mit Doppelpunkt: gespaltener Fall)

Für den Zahlkörper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ist $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Wir betrachten die Ordnung $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathfrak{o}_F$ mit $\alpha = 1 + 3\sqrt{7}$. Bestimmen Sie den Index $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$ und berechnen Sie das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 40 für $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_F$.

Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_F$. Wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}$ und p is die Primzahl mit $(p) = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: wenn $p \neq 3$, dann ist $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.

(b) Zu $p = 3$ gibt es zwei Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{o}$ und

$$R_0 := \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}_i} =: R_i$$

ist ein echter Unterring. Bestimmen Sie das Monoid P aus Aufgabe 39 in diesem Fall in Bezug auf R_i für $i = 1, 2$.

(c) Weiter zu $p = 3$. Zeigen Sie, daß $\pi = 3$ eine Uniformisierende von $R_i = \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}_i}$ ist. Bestimmen Sie den Unterring

$$R_0/\mathfrak{p} \subsetneq R_1/\mathfrak{q}_1 R_1 \times R_2/\mathfrak{q}_2 R_2.$$

Aufgabe 42. (Eine Ordnung mit Doppelpunkt: ungespaltener Fall)

Für den Zahlkörper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\varphi]$ mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir betrachten die Ordnung $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subseteq \mathfrak{o}_F$. Bestimmen Sie den Index $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$ und berechnen Sie das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 40 für $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_F$.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_F$. Wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}$ und p is die Primzahl mit $(p) = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: wenn $p \geq 3$, dann ist $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}} := (\mathfrak{o}_F)_\mathfrak{q} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.

(b) Zu $p = 2$ gibt es ein einziges $\mathfrak{q}$ und

$$R_0 := \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}} =: R$$

ist ein echter Unterring. Bestimmen Sie das Monoid P aus Aufgabe 39 in diesem Fall.

(c) Weiter zu $p = 2$. Zeigen Sie, daß $\pi = 2$ eine Uniformisierende von $R = \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}}$ ist. Das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 40 ist in diesem Fall von der Form (π^n). Bestimmen Sie n, und bestimmen Sie den Unterring

$$R_0/\mathfrak{c} \subsetneq R/\mathfrak{c}.$$

Aufgabe 43. (Eine Ordnung mit Spitze)

Für den Zahlkörper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ betrachten wir die Ordnung

$$\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[2\sqrt{2}] \subseteq \mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Bestimmen Sie den Index $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$ und berechnen Sie das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 40 für $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_F$.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_F$. Wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}$ und p is die Primzahl mit $(p) = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: wenn $p \geq 3$, dann ist $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}} := (\mathfrak{o}_F)_\mathfrak{q} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.

(b) Zu $p = 2$ gibt es ein einziges $\mathfrak{q}$ und

$$R_0 := \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}} =: R$$

ist ein echter Unterring. Bestimmen Sie das Monoid P aus Aufgabe 39 in diesem Fall.

(c) Weiter zu $p = 2$. Zeigen Sie, daß $\pi = 2$ eine Uniformisierende von $R = \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{q}}$ ist. Das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 40 ist in diesem Fall von der Form (π^n). Bestimmen Sie n, und zeigen Sie, daß der Unterring $R_0/\mathfrak{c} \subsetneq R/\mathfrak{c}$ isomorph ist zu

$$\mathbb{F}_2 \subsetneq \mathbb{F}_2[\varepsilon].$$

Hier ist wie üblich $k[\varepsilon] = k[T]/(T^2)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 10.07.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---