

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 1

Beweisen Sie jeweils durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

Aufgabe 2

Finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis.

Behauptung:

Alle Katzen haben die gleiche Farbe.

Beweis durch vollständige Induktion:

Es ist $A(n)$ die Aussage: Je n Katzen haben untereinander die gleiche Farbe.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist richtig, denn eine einzelne Katze hat die gleiche Farbe wie sie selbst.

Induktionsschluss: Wir nehmen an, $A(n)$ ist richtig für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Seien $n + 1$ Katzen gegeben. Wir nummerieren sie mit den natürlichen Zahlen $1, \dots, n + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $A(n)$ richtig, also haben je n Katzen untereinander die gleiche Farbe. Demnach haben sowohl die Katzen mit den Nummern $1, 2, \dots, n$, als auch die Katzen mit den Nummern $2, \dots, n, n + 1$ untereinander die gleiche Farbe. Aber dann haben auch alle $n + 1$ Katzen die gleiche Farbe. \square