

## Lineare Algebra

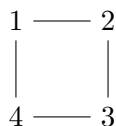
Wintersemester 2018/19

### Übungsblatt 4

6. November 2018

#### Aufgabe 1. (4 = 1+1+1+1 Punkte)

Wir nummerieren die Ecken eines Quadrats im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, 4.



Eine Drehung um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn induziert eine Permutation der Ecken und damit ein Element  $\sigma$  der symmetrischen Gruppe  $S_4$ . Die Spiegelung an der vertikalen Achse induziert eine weitere Bijektion  $\tau$ .

- Schreiben Sie  $\sigma$  und  $\tau$  als Wertetabellen auf.
- Berechnen Sie  $\sigma\tau$  und  $\tau\sigma$ .
- Bestimmen Sie die Inversen  $\sigma^{-1}$  und  $\tau^{-1}$ .
- Zeigen Sie, dass man jede Permutation der Ecken, welche durch eine starre Bewegung des Quadrats entsteht, mittels Komposition aus  $\sigma$  und  $\tau$  erhalten kann.

#### Aufgabe 2. (4=1+1+1+1 Punkte)

Bei welchen der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen handelt es sich um Unterräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; x^2 = y^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ,
- $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

#### Aufgabe 3. (4=3+1 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Eine Funktion  $f : V \rightarrow K$  heißt *homogen vom Grad  $d$* , wenn  $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$  für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in V$  gilt. Wir definieren

$$H_d(V) := \{f : V \rightarrow K ; f \text{ ist homogen vom Grad } d\}.$$

- Zeigen Sie, dass  $H_d(V)$  ein Untervektorraum von  $\text{Abb}(V, K)$  ist.
- Bestimmen Sie alle homogenen Funktionen  $f : K \rightarrow K$  vom Grad  $d$ .

**Aufgabe 4.** (4=2+1+1 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Wir definieren auf  $V$  die Relation

$$x \sim y \quad :\iff \quad x - y \in U.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Seien ab jetzt

$$K = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; x = 0 \right\}.$$

(b) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen bezüglich obiger Relation.

(c) Zeigen Sie, dass die Vorschrift  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$  eine bijektive Abbildung  $\mathbb{R}^2 / \sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  liefert.

*Hinweis: Benutzen Sie Blatt 3, Aufgabe 2(c).*

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **13. November 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19\\_18\\_WS\\_Lineare\\_Algebra](https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra)

---