

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- (a) Kongruenz modulo  $m$  ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  gilt: Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m}$  folgt  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ .
- (c) Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  gilt: Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m}$  folgt  $ac \equiv bd \pmod{m}$ .

*Hinweis:* Schreiben Sie  $a = km + b$  und  $c = k'm + d$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $x \in \mathbb{Z}$  beliebig. Zeigen Sie: Dann ist  $x^2$  oder  $x^2 - 1$  durch 4 teilbar.

*Hinweis:* Unterscheiden Sie die Fälle  $x \equiv 0, 1, 2$  bzw.  $3 \pmod{4}$ .

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

$$(a \mid b \text{ und } b \mid a) \iff a = b.$$

- (b) Sei  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \geq 2$ . Zeigen Sie:

$$p \text{ ist Primzahl} \iff (\text{Für alle } a, b \in \mathbb{Z} \text{ gilt: } p \mid ab \implies p \mid a \text{ oder } p \mid b.)$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.