

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei  $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $z \mapsto \frac{z}{1}$ . Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  ist  $i(a + b) = i(a) + i(b)$ .
- (b) Für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  ist  $i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$ .

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für  $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  gilt:

$$xy > 0 \iff x \text{ und } y \text{ haben das gleiche Vorzeichen.}$$

- (b) Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x > 0$  und  $y > 0$  gilt: Ist  $x < y$ , so ist  $y^{-1} < x^{-1}$ .
- (c) Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $y \neq 0$  gilt:  $|xy^{-1}| = |x||y|^{-1}$ .

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x < y$  (also insbesondere  $x \neq y$ ).

Zeigen Sie, dass es unendlich viele verschiedene  $z \in \mathbb{Q}$  mit  $x < z < y$  gibt.

### Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie:  $|x| = |y| \implies x^2 = y^2$ .

Geben Sie  $x, y \in \mathbb{Q}$  an, so dass  $x^2 = y^2$  aber  $x \neq y$  gilt.