

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 7

27. November 2018

Aufgabe 1. (4=1+1+1+1 Punkte)

- (a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$, \mathbb{R} -linear?
- (b) Ist die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, \mathbb{C} -linear?
- (c) Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, \mathbb{R} -linear?
- (d) Zeigen Sie: Ist K ein Körper, so hat jede K -lineare Abbildung $K \rightarrow K$ die Form $x \mapsto \lambda x$ für ein $\lambda \in K$.

Aufgabe 2. (4=1+1+1+1 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass es genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -2.$$

- (b) Berechnen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$. Geben Sie eine Formel für $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ an.
- (c) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist. Folgern Sie: $\dim(\ker(f)) = 1$.
- (d) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$.

Aufgabe 3. (3=2+1 Punkte)

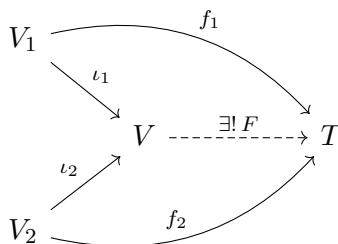
Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

- (a) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine K -lineare Abbildung $f : V \rightarrow K$ mit $f(v) \neq 0$ existiert.
- (b) Seien $x, y \in V$. Zeigen Sie: Es gilt $x = y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ für jede K -lineare Abbildung $f : V \rightarrow K$ gilt.

— bitte wenden —

Aufgabe 4. (5=2+1+2 Punkte)

Seien V_1 und V_2 zwei K -Vektorräume. Eine (*abstrakte*) *direkte Summe* (V, ι_1, ι_2) von V_1 und V_2 ist ein K -Vektorraum V zusammen mit zwei linearen Abbildungen $\iota_1 : V_1 \rightarrow V$ und $\iota_2 : V_2 \rightarrow V$, so dass für jeden weiteren K -Vektorraum T mit linearen Abbildungen $f_1 : V_1 \rightarrow T$ und $f_2 : V_2 \rightarrow T$ genau eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow T$ existiert, so dass $f_i = F \circ \iota_i$ für $i = 1, 2$ gilt.



- (a) Sei $V := V_1 \oplus V_2$, d.h. als Menge ist

$$V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) ; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

und Addition und Skalarmultiplikation sind durch

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (w_1, w_2) &:= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) && \text{für } v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2, \\ \lambda(v_1, v_2) &:= (\lambda v_1, \lambda v_2) && \text{für } \lambda \in K, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \end{aligned}$$

gegeben. Wir definieren

$$\begin{aligned} \iota_1 : V_1 &\rightarrow V_1 \oplus V_2, & \iota_1(v_1) &:= (v_1, 0), \\ \iota_2 : V_2 &\rightarrow V_1 \oplus V_2, & \iota_2(v_2) &:= (0, v_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $(V_1 \oplus V_2, \iota_1, \iota_2)$ ist eine direkte Summe von V_1 und V_2 .

- (b) Zeigen Sie: Sind (V, ι_1, ι_2) und (V', ι'_1, ι'_2) zwei direkte Summen von V_1 und V_2 . dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $F : V \xrightarrow{\sim} V'$, so dass $\iota'_i = F \circ \iota_i$ für $i = 1, 2$ gilt.
- (c) Sei V ein K -Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie folgende Aussagen: Es gibt genau eine lineare Abbildung $F : U_1 \oplus U_2 \rightarrow U_1 + U_2$ mit $F(u_1, 0) = u_1$ und $F(0, u_2) = u_2$ für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Diese ist stets surjektiv. Sie ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Summe $U_1 + U_2$ direkt ist.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **4. Dezember 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra
