

## Übungsblatt 8

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie:  $0,\overline{9} = 1$ .
- (b) Schreiben Sie den periodischen Dezimalbruch  $0,\overline{142857}$  als gekürzten Bruch in  $\mathbb{Q}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir definieren die rationale Folge  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$  rekursiv. Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x_n \geq 1$ ,  $x_n^2 \geq 5$  und  $x_n \geq x_{n+1}$ .
- (b) Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist eine Cauchyfolge.
- (c) Für den Grenzwert  $x$  der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt  $x^2 = 5$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert.
- (b) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolgen mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Zeigen Sie: Dann ist auch  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n + b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Gilt zudem  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so gilt auch  $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Lösen Sie das „Paradoxon“ von Achilles und der Schildkröte.

Achilles und die Schildkröte machen einen Wettlauf. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung von 100 Metern. Nehmen wir an, dass beide Läufer jeweils eine konstante Geschwindigkeit haben, wobei Achilles zehn mal so schnell läuft, wie die Schildkröte.

Bevor Achilles die Schildkröte überholen kann, muss er zuerst ihren Vorsprung einholen. In der Zeit, die er dafür benötigt, hat die Schildkröte aber einen neuen, wenn auch ein Zehntel des ursprünglichen, Vorsprung gewonnen, den Achilles ebenfalls erst einholen muss. Ist ihm auch das gelungen, hat die Schildkröte wiederum einen, wieder nur ein Zehntel des vorherigen, Vorsprung gewonnen, und so weiter.

Wieso überholt Achilles die Schildkröte trotzdem? Wann wird Achilles die Schildkröte erreichen?

*Hinweis:* Verwenden Sie die geometrische Reihe.

---

**Abgabe bis 10:00 am Donnerstag, den 13. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.