

Proseminar

# Divisoren und Sandhaufen: Eine Einführung in das Chip-Firing

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Sommersemester 2019

Organisator: Martin Ulirsch

Ziel dieses Proseminars ist es die mathematischen Hintergründe des sogenannten Dollar Games zu verstehen, das unter dem Link

<https://thedollargame.io/>

gespielt werden kann. Dieses Spiel wird auch in diesem [Video](#) erklärt. Die mathematischen Methoden, die zum Verständnis dieses Spiels benötigt werden, sind von der Theorie der algebraischen Kurven und der Riemannschen Flächen inspiriert. Dieses Seminar eignet sich daher auch dafür einige dieser Ideen ohne viele Vorkenntnisse kennenzulernen.

## **Vorkenntnisse:**

Lineare Algebra 1 und 2 (insbesondere die Vorlesung Grundlagen der Algebra, die besonders motivierte Studierende aber auch parallel besuchen können).

## **Ort und Zeit:**

Mittwoch, 10-12 Uhr, Robert-Mayer-Str. 10, Raum 903.

## **Anmeldung:**

Per Email an [ulirsch@math.uni-frankfurt.de](mailto:ulirsch@math.uni-frankfurt.de) mit einer Liste ihrer drei Lieblingsvorträge.

## **Literatur:**

Wir benutzen das Buch [\[CP18\]](#).

## **Vorbereitung:**

Bitte lesen Sie Anhang A und B in [\[CP18\]](#) vor Beginn des ersten Vortrags.

## **Vorträge:**

Jeder Vortrag soll etwa 90 Minuten dauern. Die letzten drei Vorträge sind thematisch unabhängig und erfordern mehr Aufwand zur Vorbereitung. Sie sind für besonders mo-

tivierte Studierende gedacht. Der vorläufige Vortragsplan wird an die Anzahl der Teilnehmer angepasst.

- 17.4. Einführung: Das Dollar-Game. [CP18, Abschnitt 1.1-1.3]. Geben Sie eine Einführung in das Dollar-Game, erst informell, dann formal korrekt. Definieren Sie die Picard-Gruppe und die Jacobische eines Graphen.
- 24.4. Der diskrete Laplace-Operator. [CP18, Abschnitt 2.1 und 2.2]. Hauptziel des Vortrags ist es, die Picard-Gruppe als Kokern des Laplace-Operators zu verstehen. Insbesondere kann Abschnitt 2.1.1 weggelassen werden.
- 1.5. Maifeiertag. Kein Vortrag.
- 8.5. Die Struktur der Picard-Gruppe. [CP18, Abschnitt 2.3 und 2.4]. Hauptziel des Vortrags ist es, die Smithsche Normalform zu verstehen.
- 15.5.  $q$ -reduzierte Divisoren. [CP18, Abschnitt 3.1-3.3]. Es soll der Begriff des  $q$ -reduzierten Divisors eingeführt werden. Diskutieren und beweisen Sie insbesondere Theorem 3.6 und seine Anwendungen.
- 22.5. Der Dharsche Brennalgorithmus. [CP18, Abschnitt 3.4-3.5]. Hauptziel des Vortrags ist es, den Dharschen Brennalgorithmus zu verstehen. Diskutieren Sie dann die Abel-Jacobi-Abbildung in Vorbereitung des nächsten Vortrags.
- 29.5. Azyklische Orientierungen. [CP18, Abschnitt 4]. In diesem Vortrag soll Theorem 4.8 erklärt und mithilfe des Dharschen Brennalgorithmus bewiesen werden.
- 5.6. Der Satz von Riemann-Roch I. [CP18, Abschnitt 5.1-5.2, 5.4]. Das Hauptziel des Vortrags ist es Theorem 5.9 und seine Anwendungen in den Korollaren 5.11-5.14 zu verstehen.
- 12.6. Der Satz von Riemann-Roch II [CP18, Abschnitt 5]. An diesem Termin werden wir in Gruppen an den Aufgaben am Ende von Kapitel 5 arbeiten, um das Thema zu vertiefen.
- 19.6. Kein Vortrag.
- 26.6. Das Matrix-Tree-Theorem. [CP18, Abschnitt 9]. Erklären sie das Matrix-Tree-Theorem, Theorem 9.3, und seine Anwendungen in Abschnitt 9.2. Geben Sie dann einen Überblick über einen der beiden vorgestellten Beweise.
- 3.7. Harmonische Morphismen. [CP18, Abschnitt 10.1]. Definieren sie harmonische Morphismen und beweisen Sie den Satz von Riemann-Hurwitz, Theorem 10.20.
- 10.7. Höherdimensionale Verallgemeinerungen. [CP18, Abschnitt 15]. Geben Sie eine Einführung in die simpliziale Homologie, höherdimensionale kritische Gruppen, und simpliziale Spanning Trees. Ziel soll es sein, die Aussage von Theorem 15.24 zu verstehen.
- 17.7. Märchenstunde: Was hat das alles mit algebraischen Kurven und Riemannschen Flächen zu tun? (Vortragender: Martin Ulirsch)

## References

[CP18] Scott Corry and David Perkinson, *Divisors and sandpiles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, An introduction to chip-firing.