

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 1

16. April 2019

Aufgabe 1. (4 = 2+2 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ bezeichne $\Re(z) = a$ den Realteil.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \Re(xy),$$

\mathbb{R} -bilinear ist.

- (b) Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, i)$ von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum.

Aufgabe 2. (3 = 1+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper. Jede Abbildung $f : K \times K \rightarrow K$ können wir mittels der Identifikation $K \times K = K^2$ auch als eine Abbildung $L : K^2 \rightarrow K$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y)$ auffassen. Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine Abbildung $f : K \times K \rightarrow K$, so dass

- (a) f bilinear auf K , aber das zugehörige $L : K^2 \rightarrow K$ nicht linear ist;
(b) f nicht bilinear auf K , aber das zugehörige $L : K^2 \rightarrow K$ linear ist;
(c) sowohl f bilinear auf K als auch das zugehörige $L : K^2 \rightarrow K$ linear ist.

Aufgabe 3. (4=2+2 Punkte)

Sei K ein Körper. Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A \in M_n(K)$ ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge:

$$\text{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K, \quad (A, B) \mapsto \text{Sp}(AB).$$

bilinear ist.

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_n(K)$ gilt:

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA).$$

Aufgabe 4. (5 = 2+3 Punkte)

Sei K ein Körper, seien V, W Vektorräume über K und sei

$$\mathcal{L}(V, W; K) := \{f : V \times W \rightarrow K \text{ bilinear}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(V, W; K)$ ein Untervektorraum von $\text{Abb}(V \times W, K)$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die folgenden K -Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind:
 - (i) $\text{Hom}_K(V, W^*)$,
 - (ii) $\mathcal{L}(V, W; K)$,
 - (iii) $\text{Hom}_K(W, V^*)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **23. April 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

<http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie>
