

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 1

Aufgabe 1

Seien I, M Mengen und für alle $i \in I$ seien $A_i \subseteq M$ beliebige Teilmengen von M . Sei außerdem $B \subseteq M$.

Zeigen Sie:

$$(a) \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B$$

$$(b) \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B$$

$$(c) \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

$$(d) \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

Aufgabe 2

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$, sowie $C, D \subseteq Y$.

Zeigen Sie:

$$(a) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(b) f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D);$$

$$(c) f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D);$$

$$(d) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Geben Sie zudem ein Beispiel an, bei dem die Inklusion echt ist.

Aufgabe 3

Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist injektiv $\implies f$ ist injektiv.

(b) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist surjektiv $\implies g$ ist surjektiv.

(c) Finden Sie Beispiele für f und g , so dass

(i) f injektiv ist, aber $g \circ f$ nicht injektiv ist.

(ii) g surjektiv ist, aber $g \circ f$ nicht surjektiv ist.

- (iii) $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.
- (iv) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4

(a) Sei (G, \circ) eine Gruppe und $U \subset G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

$$U \text{ ist eine Untergruppe} \iff U \neq \emptyset \text{ und } \forall x, y \in U : x \circ y^{-1} \in U.$$

(b) Sei (G, \circ) eine Gruppe und $x \in G$ ein Element. Zeigen Sie: die Menge

$$S_x := \{n \in \mathbb{Z} \mid x^n = 1\}$$

mit der Operation $+$ ist eine Untergruppe von \mathbb{Z} .

Griechisches Alphabet

Alpha	α	A	Ny	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π, ϖ	Π
Epsilon	ε, ϵ	E	Rho	ρ, ϱ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ, ϑ	Θ	Ypsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ, φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M	Omega	ω	Ω