Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 2 23. April 2019

Aufgabe 5. (3 = 1+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper. Die Vorschrift

$$H(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$$

für $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{y_1}{y_2} \in K^2$ definiert eine Bilinearform $H : K^2 \times K^2 \to K$.

(a) Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(H)$ von H bezüglich der Standardbasis $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ von K^2.

(b) Zeigen Sie, dass H nichtausgeartet ist.

(c) Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $U \subseteq K^2$ gibt, so dass die Einschränkung $U \times U \to K$ von H ausgeartet ist.

Aufgabe 6. (7 = 2+2+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper und V der K-Vektorraum

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } K \ ; \ x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Bedingung bedeutet, dass es eine endliche Menge $I \subseteq \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n = 0$ für alle $n \notin I$ gilt. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ sei

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Die Summe ist wohldefiniert, da alle bis auf endliche viele Summanden gleich 0 sind. Dies definiert eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nichtausgeartet ist.

(b) Sei $\varphi : V \to K$ die Linearform

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{für} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V.$$

Dies ist wieder wohldefiniert, da fast alle Summanden gleich 0 sind. Zeigen Sie, dass φ nicht von der Form $\langle -, y\rangle$ für ein $y \in V$ ist.

(c) Warum widerspricht das nicht dem Riesz'schen Darstellungssatz?

(d) Sei W der Vektorraum aller Folgen in K. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V sich zu einer Paarung $V \times W \to K$ fortsetzt, so dass $\varphi = \langle -, y\rangle$ für ein geeignetes $y \in W$ gilt.

— bitte wenden —

Aufgabe 7. (6 = 2+2+2 Punkte)

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$T(x) = x + \langle v, x \rangle w,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist, und

(a) $v = e_2, \quad w = e_1,$

(b) $v = e_1, \quad w = e_1,$

(c) $v = e_2, \quad w = -2e_2.$

Bestimmen Sie jeweils die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Standardbasis, und skizzieren Sie das Bild des Einheitsquadrats $Q = [0,1] \times [0,1]$ unter T.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **30. April 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`
