Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Präsenzaufgabenblatt 2 23. April 2019

Aufgabe 1.

Geben Sie für die folgenden Paarungen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen jeweils die Gram'sche Matrix an und entscheiden Sie, ob sie nichtausgeartet ist:

(a) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1,$

(b) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_1 y_2,$

(c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x y_1 - x y_2,$

(d) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1,$

(e) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$

Hierbei bezeichnet x_i (bzw. y_i) jeweils die i-te Komponente von x (bzw. y).

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Diagonalabbildung, d.h.

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung $f^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3.

Sei $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

eine Bilinearform auf $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ definiert. Bestimmen Sie die zugehörige Gram'sche Matrix bezüglich der Basis $(1, X, X^2)$.

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern wird in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`