Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 3 30. April 2019

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei V der K-Vektorraum

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } K \ ; \ x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V.$$

(vgl. Aufgabe 6, Blatt 2). Seien die Endomorphismen $L, R : V \to V$ definiert durch

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4, \ldots), \\ R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass L und R bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adjungiert[1] sind.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D, so dass $A = S^t D S$ für eine geeignete Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gilt. (Sie müssen S nicht bestimmen.)

Aufgabe 10. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$, sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(A + A^t)$ symmetrisch und $\frac{1}{2}(A - A^t)$ antisymmetrisch ist.

(b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Bilinearform $f : V \times V \to K$. Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V und gelte $f(b, b) = 0$ für alle $b \in \mathscr{B}$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass f im Allgemeinen nicht alternierend ist.

—— **bitte wenden** ——

[1] Adjungierte Abbildungen wurden in der Vorlesung zwar nur für lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit perfekten Bilinearformen eingeführt, aber die Definition verallgemeinert sich direkt auf allgemeine Vektorräume mit allgemeinen Bilinearformen. Bei nicht-ausgearteten Bilinearformen ist die adjungierte Abbildung eindeutig, sofern sie existiert.

Aufgabe 11. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von K^n und $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis bezüglich des Standardskalarprodukts. Seien $A \coloneqq [v_1, \ldots, v_n]$ und $A^* \coloneqq [v_1^*, \ldots, v_n^*]$ die Matrizen mit den v_i (bzw. v_i^*) als Spalten. Zeigen Sie:

$$A^t A^* = \mathbf{1}_n.$$

(b) Die Vektoren

$$v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die duale Basis (v_1^*, v_2^*) bezüglich des Standardskalarprodukts. Skizzieren Sie die Basen im $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **7. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`