

## Geometrie

Sommersemester 2019

---

### Präsenzaufgabenblatt 3

30. April 2019

---

#### Aufgabe 1.

Welche der folgenden Bilinearformen sind symmetrisch/antisymmetrisch/alternierend?

- (a)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1$ ,
- (b)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2$ ,
- (c)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2$ ,
- (d)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ ,
- (e)  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \operatorname{Im}(x\bar{y})$ ,
- (f)  $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ ,  $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_iy_i$ .

#### Aufgabe 2.

Seien

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}^* := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}^*$  zueinander duale Basen bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $\mathbb{R}^2$  sind.

#### Aufgabe 3.

Das Kreuzprodukt  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist definiert als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $\times$  bilinear und alternierend ist. Folgern Sie

$$b \times a = -a \times b \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}^3.$$

#### Aufgabe 4.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $A = S^t D S$  für ein  $S \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$  gilt.

---

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern wird in den Tutorien besprochen.  
Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

<http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie>

---