Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 1 16. April 2019

Aufgabe 1. (4 = 2+2 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ bezeichne $\Re(z) = a$ den Realteil.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \Re(xy),$$

$\mathbb{R}$-bilinear ist.

(b) Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (1, i)$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1:

(a) Für $x_1, x_2, y \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda x_2, y) &= \Re((x_1 + \lambda x_2)y) \\ &= \Re(x_1 y + \lambda x_2 y) \\ &= \Re(x_1 y) + \lambda \Re(x_2, y) \\ &= f(x_1, y) + \lambda f(x_2, y). \end{aligned}$$

Dabei folgt die dritte Gleichung aus der $\mathbb{R}$-Linearität von $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Somit ist f linear im ersten Argument. Wegen der Symmetrie

$$f(x, y) = \Re(xy) = \Re(yx) = f(y, x) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{C}$$

folgt automatisch auch die Linearität im zweiten Argument. Damit ist f $\mathbb{R}$-bilinear.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \Re(1 \cdot 1) = \Re(1) = 1, & f(1,i) &= \Re(1 \cdot i) = \Re(i) = 0, \\ f(i,1) &= \Re(i \cdot 1) = \Re(i) = 0, & f(i,i) &= \Re(i \cdot i) = \Re(-1) = -1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gram'sche Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (3 = 1+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper. Jede Abbildung $f : K \times K \to K$ können wir mittels der Identifikation $K \times K = K^2$ auch als eine Abbildung $L : K^2 \to K$, $\binom{x}{y} \mapsto f(x, y)$ auffassen. Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine Abbildung $f : K \times K \to K$, so dass

(a) f bilinear auf K, aber das zugehörige $L : K^2 \to K$ nicht linear ist;

(b) f nicht bilinear auf K, aber das zugehörige $L : K^2 \to K$ linear ist;

(c) sowohl f bilinear auf K als auch das zugehörige $L : K^2 \to K$ linear ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2:

(a) $f(x, y) \coloneqq xy$ ist bilinear (nämlich das Standardskalarprodukt auf K), aber das zugehörige L ist nicht linear:

$$L(e_1 + e_2) = L(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$L(e_1) + L(e_2) = L(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \neq 1.$$

(b) $f(x, y) \coloneqq x$ ist nicht bilinear, denn bilineare Abbildungen haben den Wert 0, falls eines der beiden Argumente 0 ist, aber es gilt

$$f(1, 0) = 1 \neq 0.$$

Das zugehörige $L : \binom{x}{y} \mapsto x$ ist aber linear.

(c) Die Nullabbildung $K \times K \to K$ ist bilinear. Das zugehörige $L : K^2 \to K$ ist ebenfalls die Nullabbildung und damit linear.

Aufgabe 3. (4=2+2 Punkte)

Sei K ein Körper. Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge:

$$\mathrm{Sp}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB).$$

bilinear ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt:

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA).$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 3:

(a) Die Spurabbildung $\mathrm{Sp} : \mathrm{M}_n(K) \to K$ ist K-linear, denn für $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\mathrm{Sp}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Sp}(A) + \lambda\, \mathrm{Sp}(B).$$

Seien nun $A_1, A_2, B \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$, dann gilt

$$\mathrm{Sp}((A_1 + \lambda A_2)B) = \mathrm{Sp}(A_1 B + \lambda A_2 B) = \mathrm{Sp}(A_1 B) + \lambda\, \mathrm{Sp}(A_2 B),$$

wobei wir die Linearität der Spur für die zweite Gleichung benutzt haben. Damit ist die betrachtete Abbildung im ersten Argument linear. Die Linearität im zweiten Argument kann man analog zeigen. Sie folgt aber auch automatisch aus der in (b) gezeigten Symmetrie.

(b) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}, \\
\mathrm{Sp}(BA) &= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij},
\end{aligned}$$

somit $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Aufgabe 4. (5 = 2+3 Punkte)

Sei K ein Körper, seien V, W Vektorräume über K und sei

$$\mathscr{L}(V, W; K) := \{f : V \times W \to K \text{ bilinear}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}(V, W; K)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V \times W, K)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden K-Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind:
   (i) $\mathrm{Hom}_K(V, W^*)$,
   (ii) $\mathscr{L}(V, W; K)$,
   (iii) $\mathrm{Hom}_K(W, V^*)$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 4:

(a) Seien $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(V, W; K)$ und $\alpha \in K$. Wir müssen zeigen, dass auch $f_1 + \alpha f_2$ bilinear ist. Für $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
&(f_1 + \alpha f_2)(v_1 + \lambda v_2, w) \\
&= f_1(v_1 + \lambda v_2, w) + \alpha f_2(v_1 + \lambda v_2, w) \\
&= f_1(v_1, w) + \lambda f_1(v_2, w) + \alpha\big(f_2(v_1, w) + \lambda f_2(v_2, w)\big) \qquad (f_1,\ f_2 \text{ bilinear}) \\
&= (f_1 + \alpha f_2)(v_1, w) + \lambda(f_1 + \alpha f_2)(v_2, w),
\end{aligned}$$

damit ist $f_1 + \alpha f_2$ linear im ersten Argument. Für $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$ rechnen wir analog die Linearität im zweiten Argument nach:

$$\begin{aligned}
&(f_1 + \alpha f_2)(v, w_1 + \lambda w_2) \\
&= f_1(v, w_1 + \lambda w_2) + \alpha f_2(v, w_1 + \lambda w_2) \\
&= f_1(v, w_1) + \lambda f_1(v, w_2) + \alpha\big(f_2(v, w_1) + \lambda f_2(v, w_2)\big) \qquad (f_1,\ f_2 \text{ bilinear}) \\
&= (f_1 + \alpha f_2)(v, w_1) + \lambda(f_1 + \alpha f_2)(v, w_2).
\end{aligned}$$

(b) Zunächst beobachten wir, dass $\mathscr{L}(V, W; K)$ symmetrisch in V und W ist, d.h. wir haben einen natürlichen Isomorphismus $\Phi : \mathscr{L}(V, W; K) \cong \mathscr{L}(W, V; K)$, der durch Vertauschung der beiden Argumente, also $\Phi(f)(w, v) := f(v, w)$, gegeben

ist. Damit genügt es, einen natürlichen Isomorphismus zwischen (i) und (ii) zu finden, dann erhalten wir (iii) automatisch.
Wir definieren zwei Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\beta : \mathrm{Hom}_K(V, W^*) \to \mathscr{L}(V, W; K), \\
&\qquad \beta(g)(v, w) \coloneqq g(v)(w) \quad \text{für } g \in \mathrm{Hom}_K(V, W^*), v \in V, w \in W, \\
&\gamma : \mathscr{L}(V, W; K) \to \mathrm{Hom}_K(V, W^*), \\
&\qquad \gamma(f)(v) \coloneqq f(v, -) \quad \text{für } f \in \mathscr{L}(V, W; K), v \in V.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $f(v, -)$ die Abbildung $W \to K, w \mapsto f(v, w)$.

- $\beta(g)$ ist linear im ersten Argument: Für $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta(g)(v_1 + \lambda v_2, w) &= g(v_1 + \lambda v_2)(w) \\
&= \big(g(v_1) + \lambda g(v_2)\big)(w) && (g \text{ linear}) \\
&= g(v_1)(w) + \lambda g(v_2)(w) \\
&= \beta(g)(v_1, w) + \lambda \beta(g)(v_2, w).
\end{aligned}$$

- $\beta(g)$ ist linear im zweiten Argument: Für $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta(g)(v, w_1 + \lambda w_2) &= g(v)(w_1 + \lambda w_2) \\
&= g(v)(w_1) + \lambda g(v)(w_2) && (g(v) \in W^* \text{ linear}) \\
&= \beta(g)(v, w_1) + \lambda \beta(g)(v, w_2).
\end{aligned}$$

- β ist linear: Seien $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, W^*)$ und $\lambda \in K$. Für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta(g_1 + \lambda g_2)(v, w) &= (g_1 + \lambda g_2)(v)(w) \\
&= \big(g_1(v) + \lambda g_2(v)\big)(w) \\
&= g_1(v)(w) + \lambda g_2(v)(w) \\
&= \beta(g_1)(v, w) + \lambda \beta(g_2)(v, w) \\
&= \big(\beta(g_1) + \lambda \beta(g_2)\big)(v, w),
\end{aligned}$$

  somit $\beta(g_1 + \lambda g_2) = \beta(g_1) + \lambda \beta(g_2)$.
- $\gamma(f)(v) = f(v, -)$ ist linear, also ein Element von W^*, für alle $f \in \mathscr{L}(V, W; K)$ und $v \in V$, da f im zweiten Argument linear ist.
- $\gamma(f) : V \to W^*$ ist linear, da f im ersten Argument linear ist.

Damit ist gezeigt, dass beide Abbildungen wohldefiniert und β linear sind. Wir prüfen noch, dass sie zueinander invers sind, dann handelt es sich um Isomorphismen.

- Sei $f \in \mathscr{L}(V, W; K)$. Für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned}
\big((\beta \circ \gamma)(f)\big)(v, w) &= \big(\gamma(f)(v)\big)(w) \\
&= \big(f(v, -)\big)(w) \\
&= f(v, w),
\end{aligned}$$

  somit $(\beta \circ \gamma)(f) = f$.

- Sei $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W^*)$. Für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \beta)(g)(v)(w) &= \big(\beta(g)(v, -)\big)(w)\\ &= \beta(g)(v, w)\\ &= g(v)(w),\end{aligned}$$

  somit $(\gamma \circ \beta)(g) = g$.