Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 4 7. Mai 2019

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Seien

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U bezüglich des Standardskalarprodukts. Schreiben Sie v in der Form

$$v = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in U^{\perp}$. Skizzieren Sie die Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 13. (5 = 2+1+2 Punkte)

Sei $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ die Basis von $\mathbb{R}^3$ mit

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathscr{C}$ an, um eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts zu erhalten.

(b) Berechnen Sie eine ONB $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^3$ durch Normierung der in (a) berechneten Orthogonalbasisvektoren.

(c) Wenden Sie das Ortho<u>norm</u>alisierungsverfahren auf $\mathscr{C}$ an, um eine weitere ONB $\mathscr{B}'$ von $\mathbb{R}^3$ zu erhalten. Vergleichen Sie die beiden berechneten ONBs $\mathscr{B}$ und $\mathscr{B}'$.

Aufgabe 14. (4 = 2+2 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils, ob die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_A$ auf $\mathbb{R}^3$ positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 15. (4 = 1+1+2 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$D_\alpha \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix mit Winkel α.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(D_\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie $D_0 = \mathbf{1}$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha D_\beta$.

(c) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = 1$ von der Form D_α für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweise: Die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{smallmatrix}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *bilden den Einheitskreis* $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}$ *in* $\mathbb{R}^2$. *Es gelten für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *die Additionstheoreme:*

(i) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

(ii) $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **14. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`