Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 2 23. April 2019

Aufgabe 5. (3 = 1+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper. Die Vorschrift

$$H(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

für $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{y_1}{y_2} \in K^2$ definiert eine Bilinearform $H : K^2 \times K^2 \to K$.

(a) Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix $\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(H)$ von H bezüglich der Standardbasis $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ von K^2.

(b) Zeigen Sie, dass H nichtausgeartet ist.

(c) Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $U \subsetneq K^2$ gibt, so dass die Einschränkung $U \times U \to K$ von H ausgeartet ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} H(e_1,e_1) &= 1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0, & H(e_1,e_2) &= 1\cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1,\\ H(e_2,e_1) &= 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1, & H(e_2,e_2) &= 0\cdot 1 - 0\cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Das ergibt die Gram'sche Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wegen

$$\det \mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(H) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

ist H nichtausgeartet.

(c) Sei $U := \langle e_1 \rangle_K \subsetneq K^2$. Wegen $H(e_1, e_1) = 0$ hat die Einschränkung von H auf U die Gram'sche Matrix (0), ist somit ausgeartet.

Aufgabe 6. (7 = 2+2+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper und V der K-Vektorraum

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } K \; ; \; x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Bedingung bedeutet, dass es eine endliche Menge $I \subseteq \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n = 0$ für alle $n \notin I$ gilt. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ sei

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Die Summe ist wohldefiniert, da alle bis auf endliche viele Summanden gleich 0 sind. Dies definiert eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nichtausgeartet ist.

(b) Sei $\varphi : V \to K$ die Linearform

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{für} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V.$$

Dies ist wieder wohldefiniert, da fast alle Summanden gleich 0 sind. Zeigen Sie, dass φ nicht von der Form $\langle -, y\rangle$ für ein $y \in V$ ist.

(c) Warum widerspricht das nicht dem Riesz'schen Darstellungssatz?

(d) Sei W der Vektorraum aller Folgen in K. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V sich zu einer Paarung $V \times W \to K$ fortsetzt, so dass $\varphi = \langle -, y\rangle$ für ein geeignetes $y \in W$ gilt.

Lösungsskizze zu Aufgabe 6:

(a) Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch ist, genügt es zu zeigen, dass die Bilinearform links-nichtausgeartet ist. Sei $0 \neq x \in V$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq 0$. Bezeichne e_n die Folge, deren n-tes Folgenglied 1 ist und alle anderen 0, dann gilt $\langle x, e_n\rangle = x_n \neq 0$, somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nichtausgeartet.

(b) Sei $y \in V$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n = 0$; dies existiert, da $y_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle e_n, y\rangle &= y_n = 0, \\ \varphi(e_n) &= 1 \neq 0, \end{aligned}$$

also $\varphi \neq \langle -, y\rangle$.

(c) Der Riesz'sche Darstellungssatz gilt für endlich-dimensionale Vektorräume, aber V ist unendlich-dimensional: eine Basis besteht aus den Folgen e_n für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Die Vorschrift $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ist auch als Paarung $V \times W \to K$ wohldefiniert, da fast alle x_n und damit fast alle Summanden gleich 0 sind. Sei $y := (1, 1, \dots) \in W$, dann gilt für $x \in V$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 1 = \varphi(x),$$

also $\varphi = \langle -, y\rangle$.

Aufgabe 7. (6 = 2+2+2 Punkte)

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$T(x) = x + \langle v, x\rangle w,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist, und

(a) $v = e_2, \quad w = e_1,$

(b) $v = e_1, \quad w = e_1,$

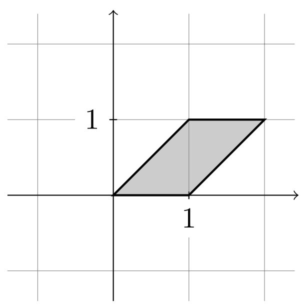
(c) $v = e_2, \quad w = -2e_2.$

Bestimmen Sie jeweils die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Standardbasis, und skizzieren Sie das Bild des Einheitsquadrats $Q = [0,1] \times [0,1]$ unter T.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7:

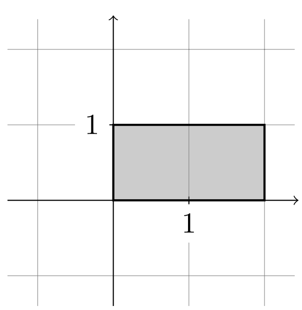
(a)

$$\begin{aligned} & T(e_1) = e_1 + \langle e_2, e_1\rangle e_1 = e_1 + 0e_1 = e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \\ & T(e_2) = e_2 + \langle e_2, e_2\rangle e_1 = e_2 + 1e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(b)

$$\begin{aligned} & T(e_1) = e_1 + \langle e_1, e_1\rangle e_1 = e_1 + 1e_1 = 2e_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right), \\ & T(e_2) = e_2 + \langle e_1, e_2\rangle e_1 = e_2 + 0e_1 = e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(c)

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_1 - 2\langle e_2, e_1\rangle e_2 = e_1 - 2\cdot 0 e_2 = e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\\ T(e_2) &= e_2 - 2\langle e_2, e_2\rangle e_2 = e_2 - 2\cdot 1 e_2 = -e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{M}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(T) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$