

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 5

14. Mai 2019

Aufgabe 16. (8 = 1+2+3+2 Punkte)

Für $d \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 ; a_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i\}$$

der \mathbb{R} -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Mit der Bilinearform

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

wird $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ zu einem euklidischen Vektorraum.

- Berechnen Sie den Winkel zwischen 1 und x^2 bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sie können einen Taschenrechner benutzen, um Näherungswerte des Arkuskosinus zu berechnen.
- Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Sei $f(x) := x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Berechnen Sie für $i = 0, 1, 2$ jeweils dasjenige Polynom $p_i(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq i}$, welches den Abstand $\|f - p_i\|$ in der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm minimiert.
- Zeichnen Sie die Funktionsgraphen von f und p_0, p_1, p_2 im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ mit einem Computeralgebrasystem.
Sie können zum Beispiel <https://sagecell.sagemath.org> benutzen und Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin einen Link zum Worksheet per E-Mail senden.

Aufgabe 17. (3 Punkte)

Bestimmen Sie eine ONB von \mathbb{R}^2 bezüglich des Standardskalarprodukts aus Eigenvektoren von

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 18. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $p_W : V \rightarrow V$ die orthogonale Projektion auf einen Unterraum W von V . Zeigen Sie, dass für $v \in V$ in der Bessel'schen Ungleichung $\|p_W(v)\| \leq \|v\|$ genau dann Gleichheit gilt, wenn $v \in W$ ist.

Aufgabe 19. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur der symmetrischen Bilinearform $(A, B) \mapsto \text{Sp}(AB)$ auf $M_n(\mathbb{R})$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 3) in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **21. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

<http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie>
