Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 3 30. April 2019

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei V der K-Vektorraum

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } K\ ;\ x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V.$$

(vgl. Aufgabe 6, Blatt 2). Seien die Endomorphismen $L, R : V \to V$ definiert durch

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \dots) &= (x_2, x_3, x_4, \dots), \\ R(x_1, x_2, x_3, \dots) &= (0, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass L und R bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adjungiert[1] sind.

Lösungsskizze zu Aufgabe 8:

Seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Zu zeigen ist

$$\langle L(x), y\rangle = \langle x, R(y)\rangle.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \langle L(x), y\rangle &= \langle (x_2, x_3, x_4, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle \\ &= x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + \dots \\ &= x_1 \cdot 0 + x_2y_1 + x_3y_2 + \dots \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (0, y_1, y_2, \dots)\rangle \\ &= \langle x, R(y)\rangle. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D, so dass $A = S^tDS$ für eine geeignete Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gilt. (Sie müssen S nicht bestimmen.)

[1] Adjungierte Abbildungen wurden in der Vorlesung zwar nur für lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit perfekten Bilinearformen eingeführt, aber die Definition verallgemeinert sich direkt auf allgemeine Vektorräume mit allgemeinen Bilinearformen. Bei nicht-ausgearteten Bilinearformen ist die adjungierte Abbildung eindeutig, sofern sie existiert.

Lösungsskizze zu Aufgabe 9:

Wir folgen dem Algorithmus zur Bestimmung der Normalform einer symmetrischen Matrix aus der Vorlesung.

- Sei $A_1 \coloneqq A$. Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1^t \\ x_1 & B_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_1 \coloneqq 1,\ x_1 \coloneqq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ B_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Durch symmetrische Zeilen- und Spaltenumformungen wird A_1 zu

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

  mit

$$A_2 = B_1 - \alpha_1^{-1} x_1 x_1^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Nun ist

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2^t \\ x_2 & B_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_2 \coloneqq 2,\ x_2 \coloneqq (4),\ B_2 \coloneqq (4).$$

  Symmetrische Zeilen- und Spaltenumformungen:

$$A_2 \rightsquigarrow A_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

  mit

$$A_3 = B_2 - \alpha_2^{-1} x_2 x_2^t = (4) - 2^{-1}(4)(4) = -4.$$

Es ergibt sich die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}.$$

Man kann auch die Diagonaleinträge durch Elemente des Vertretersystems $\{-1, 0, 1\}$ von $\mathbb{R}$ modulo den Quadraten ersetzen und erhält dann

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$, sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(A + A^t)$ symmetrisch und $\frac{1}{2}(A - A^t)$ antisymmetrisch ist.

(b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Bilinearform $f : V \times V \to K$. Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V und gelte $f(b, b) = 0$ für alle $b \in \mathscr{B}$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass f im Allgemeinen nicht alternierend ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 10:

(a) Wir berechnen

$$\left(\tfrac{1}{2}(A+A^t)\right)^t = \tfrac{1}{2}(A^t+(A^t)^t) = \tfrac{1}{2}(A^t+A) = \tfrac{1}{2}(A+A^t),$$
$$\left(\tfrac{1}{2}(A-A^t)\right)^t = \tfrac{1}{2}(A^t-(A^t)^t) = \tfrac{1}{2}(A^t-A) = -\tfrac{1}{2}(A-A^t).$$

Damit ist $\frac{1}{2}(A+A^t)$ symmetrisch und $\frac{1}{2}(A-A^t)$ antisymmetrisch.

(b) Sei $K=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$ und $f(x,y)=x^tAy$ mit

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $f(x,y)=x_1y_2$. Sei $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ die Standardbasis. Es gilt

$$f(e_1,e_1) = 1\cdot 0 = 0,$$
$$f(e_2,e_2) = 0\cdot 1 = 0,$$

aber

$$f(e_1+e_2, e_1+e_2) = 1\cdot 1 = 1 \neq 0,$$

somit ist f nicht alternierend, obwohl $f(b,b)=0$ für alle $b\in\mathscr{B}$ gilt.

Aufgabe 11. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und $n\in\mathbb{N}_0$. Sei $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von K^n und $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ die duale Basis bezüglich des Standardskalarprodukts. Seien $A\coloneqq[v_1,\dots,v_n]$ und $A^*\coloneqq[v_1^*,\dots,v_n^*]$ die Matrizen mit den v_i (bzw. v_i^*) als Spalten. Zeigen Sie:

$$A^tA^* = \mathbf{1}_n.$$

(b) Die Vektoren

$$v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die duale Basis (v_1^*,v_2^*) bezüglich des Standardskalarprodukts. Skizzieren Sie die Basen im $\mathbb{R}^2$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 11:

(a) Wir berechnen

$$A^tA^* = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^tv_1^* & \cdots & v_1^tv_n^* \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^tv_1^* & \cdots & v_n^tv_n^* \end{pmatrix} = (\langle v_i, v_j^*\rangle)_{\substack{1\le i\le n,\\ 1\le j\le n}} = \mathbf{1}_n.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Definition der dualen Basis: $\langle v_i, v_j^*\rangle = \delta_{ij}$.

(b) Aus (a) wissen wir, dass v_1^*, v_2^* die Spalten von $(A^t)^{-1}$ sind, wobei

$$A = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

somit erhalten wir

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad v_2^* = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Skizze: