

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 6

21. Mai 2019

Aufgabe 20. (5 = 3+2 Punkte)

Sei $Q(X, Y)$ die quadratische Form in zwei Variablen

$$Q(X, Y) := 17X^2 - 12XY + 8Y^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Variablensubstitution, d.h.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{mit } S \in O(2),$$

so dass Q die Gestalt

$$Q(X, Y) = \lambda U^2 + \mu V^2$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ annimmt.

(b) Skizzieren Sie ebene Quadrik

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; Q(x, y) = 5 \right\}$$

und ihre Hauptachsen.

Aufgabe 21. (3 Punkte)

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die ebene Quadrik

$$V_a := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + axy + y^2 = 1 \right\}$$

eine Ellipse/Hyperbel/Vereinigung zweier Geraden?

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$. Zeigen Sie, dass es keine anisotrope symmetrische Bilinearform auf V gibt. Was ist mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) < 2$?

Aufgabe 23. (4 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form

$$Q(X, Y, Z) := 2XY + 2XZ + 2YZ$$

durch eine orthogonale lineare Variablentransformation in Diagonalgestalt. Welche Form hat die Quadrik

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; Q(x, y, z) = 1 \right\}?$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **28. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

<http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie>