Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 4 7. Mai 2019

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Seien

$$U \coloneqq \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad v \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U bezüglich des Standardskalarprodukts. Schreiben Sie v in der Form

$$v = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Skizzieren Sie die Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 12:

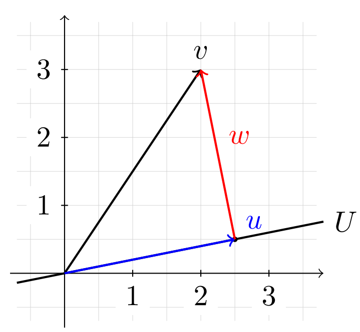
Sei $u_1 \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ der Basisvektor von U. Gemäß der Formel für die orthogonale Projektion berechnen wir

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{5 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{5^2 + 1^2} u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Seien

$$u \coloneqq P_U(v) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$
$$w \coloneqq v - P_U(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix},$$

dann gilt $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Skizze:



Aufgabe 13. (5 = 2+1+2 Punkte)

Sei $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ die Basis von $\mathbb{R}^3$ mit

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathscr{C}$ an, um eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts zu erhalten.

(b) Berechnen Sie eine ONB $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^3$ durch Normierung der in (a) berechneten Orthogonalbasisvektoren.

(c) Wenden Sie das Ortho<u>norm</u>alisierungsverfahren auf $\mathscr{C}$ an, um eine weitere ONB $\mathscr{B}'$ von $\mathbb{R}^3$ zu erhalten. Vergleichen Sie die beiden berechneten ONBs $\mathscr{B}$ und $\mathscr{B}'$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 13:

(a)
- $b_1 = c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $b_2 = c_2 - \frac{\langle c_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 0+7\cdot(-1)}{(-1)^2+0^2+(-1)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $b_3 = c_3 - \frac{\langle c_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle c_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix}$

Damit ist (b_1, b_2, b_3) eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Durch die Normierung $\tilde{b}_i := \frac{1}{\sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}} b_i$ erhalten wir eine ONB $\mathscr{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$:

- $\langle b_1, b_1 \rangle = (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $\langle b_2, b_2 \rangle = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$
- $\langle b_3, b_3 \rangle = \frac{1}{9^2}(1^2 + 4^2 + (-1)^2) = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2/9}} \begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c) Gram-Schmidt-Orthonormalisierung liefert eine ONB $\mathscr{B}' = (\tilde{b}'_1, \tilde{b}'_2, \tilde{b}'_3)$:

- $b'_1 = c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}'_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle b'_1, b'_1 \rangle}} b'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $b'_2 = c_2 - \langle c_2, \tilde{b}'_1 \rangle \tilde{b}'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - (3\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) + 1\cdot 0 + 7\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{2})) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

  $\tilde{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle b'_2, b'_2 \rangle}} b'_2 = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

- $\tilde{b}'_3 = c_3 - \langle c_3, \tilde{b}'_1\rangle \tilde{b}'_1 - \langle c_3, \tilde{b}'_2\rangle \tilde{b}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix}$,

  $\tilde{b}'_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle b'_3, b'_3\rangle}} b'_3 = \frac{1}{\sqrt{2/9}} \begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Wir stellen fest, dass wir die gleiche ONB wie in (b) erhalten: $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Aufgabe 14. (4 = 2+2 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils, ob die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_A$ auf $\mathbb{R}^3$ positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

Lösungsskizze zu Aufgabe 14:

(a) Wir transformieren A mittels symmetrischer Zeilen- und Spaltenumformungen in Diagonalform, d.h. wir berechnen die Gram'sche Matrix von $\langle\ ,\ \rangle_A$ bezüglich einer Orthogonalbasis (vgl. Aufgabe 9, Blatt 3):

- $A_1 := A, \quad \alpha_1 := 4$
- $A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{4} \end{pmatrix}$,

  $\alpha_2 := -\frac{1}{4}$
- $A_3 := (-\frac{17}{4}) - (-\frac{1}{4})^{-1}(-\frac{3}{4})^2 = (-\frac{17}{4}) + (\frac{9}{4}) = (-2)$,

  $\alpha_3 := -2$

Wir erhalten die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

Da sowohl positive als auch negative Einträge vorkommen, ist $\langle\ ,\ \rangle_A$ indefinit.

(b) Wir transformieren A wieder mittels symmetrischer Zeilen- und Spaltenumformungen in Diagonalform:

- $A_1 := A, \quad \alpha_1 := -1$
- $A_2 := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} - (-1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

  $\alpha_2 := -3$
- $A_3 := (-1) - (-3)^{-1}(1) \cdot (1) = (-1) + (\frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3})$,

  $\alpha_3 := -\frac{2}{3}$

Wir erhalten die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -3 & \\ & & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Da alle Einträge negativ sind, ist $\langle\ ,\ \rangle_A$ negativ definit. Alternativ kann man auch das Hauptminorenkriterium für negative Definitheit benutzen.

Aufgabe 15. (4 = 1+1+2 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix mit Winkel α.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(D_\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie $D_0 = \mathbf{1}$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha D_\beta$.

(c) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = 1$ von der Form D_α für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweise: Die Vektoren $\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *bilden den Einheitskreis* $\{\binom{x}{y}\ ;\ x^2 + y^2 = 1\}$ *in* $\mathbb{R}^2$. *Es gelten für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *die Additionstheoreme:*

(i) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

(ii) $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 15:

(a) Gemäß dem Hinweis liegt $\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis, d.h. es gilt

$$\det(D_\alpha) = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$$

(b) Aus $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ folgt

$$D_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} D_{\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= D_\alpha D_\beta. \end{aligned}$$

(c) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ orthogonal mit $\det(A) = 1$. Die Orthogonalität bedeutet $A^t = A^{-1}$. Wegen $\det(A) = 1$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

und die Gleichung $A^t = A^{-1}$ besagt

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

also $a = d$ und $b = -c$. Damit hat A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $1 = \det(A) = a^2 + c^2$ liegt der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ auf dem Einheitskreis, ist also gemäß dem Hinweis von der Form

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$