

## Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

### Übungsblatt 1

28. Mai 2019

#### Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass  $G$  genau dann abelsch ist, wenn die Verknüpfungsabbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G, \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

#### Aufgabe 2. (5 = 2+2+1 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $\text{Aff}^1(K)$  die Menge der Polynome der Form  $aX + b$  mit  $a \in K^\times$  und  $b \in K$ .

- Zeigen Sie, dass  $\text{Aff}^1(K)$  bezüglich der Verknüpfung  $(f, g) \mapsto (f \circ g)(X) := f(g(X))$  eine Gruppe ist.
- Zeigen Sie, dass  $\text{Aff}^1(K)$  nicht abelsch ist, wenn  $|K| > 2$  gilt. Was ist mit  $K = \mathbb{F}_2$ ?
- Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Aff}^1(K) &\longrightarrow \text{GL}_2(K), \\ aX + b &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

#### Aufgabe 3. (3 = 1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen sind Untergruppen?

- $\mathbb{R}^\times \subseteq (\mathbb{R}, +)$ ;
- $\{2^n ; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ ;
- $\{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) ; A \text{ diagonalisierbar}\} \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

— bitte wenden —

**Aufgabe 4.** (4 = 2+2 Punkte)

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe. Sei  $G^{\text{op}} := G$  als Menge, aber ausgestattet mit der Verknüpfung

$$g \cdot^{\text{op}} h := h \cdot g.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $(G^{\text{op}}, \cdot^{\text{op}})$  eine Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $g \mapsto g^{-1}$  einen Isomorphismus  $G \cong G^{\text{op}}$  definiert.

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **4. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen\\_der\\_Algebra](http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra)

---