Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Geometrie

Sommersemester 2019

Übungsblatt 5 14. Mai 2019

Aufgabe 16. (8 = 1+2+3+2 Punkte)

Für $d \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathbb{R}[x]_{\leq d} \coloneqq \{f(x) = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0 \ ; \ a_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i\}$$

der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Mit der Bilinearform

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

wird $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ zu einem euklidischen Vektorraum.

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen 1 und x^2 bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$.
Sie können einen Taschenrechner benutzen, um Näherungswerte des Arkuskosinus zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$.

(c) Sei $f(x) \coloneqq x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Berechnen Sie für $i = 0, 1, 2$ jeweils dasjenige Polynom $p_i(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq i}$, welches den Abstand $\|f - p_i\|$ in der durch $\langle\ ,\ \rangle$ induzierten Norm minimiert.

(d) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen von f und p_0, p_1, p_2 im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ mit einem Computeralgebrasystem.
Sie können zum Beispiel `https://sagecell.sagemath.org` *benutzen und Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin einen Link zum Worksheet per E-Mail senden.*

Lösungsskizze zu Aufgabe 16:

(a) Zunächst berechnen wir allgemein für $i, j \geq 0$:

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{-1}^{1} t^{i+j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j+1}\left(1^{i+j+1} - (-1)^{i+j+1}\right) = \begin{cases} \frac{2}{i+j+1}, & \text{falls } i+j \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } i+j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt im Fall $i = j$:

$$\|x^i\|^2 = \langle x^i, x^i \rangle = \frac{2}{2i+1}.$$

Ist nun α der Winkel zwischen 1 und x^2, dann erhalten wir

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\|1\| \cdot \|x^2\|} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

Mit Hilfe eines Taschenrechners ergibt sich der Winkel

$$\alpha = \arccos(\tfrac{1}{3}\sqrt{5}) \approx 41{,}8^\circ.$$

(b) Wir wenden das Gram–Schmidt-Verfahren auf die Basis $(1, x, x^2)$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ an:

- $b_0 \coloneqq 1$
- $b_1 \coloneqq x - \frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x$
- $b_2 \coloneqq x^2 - \frac{\langle x^2,1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{\langle x^2,x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$

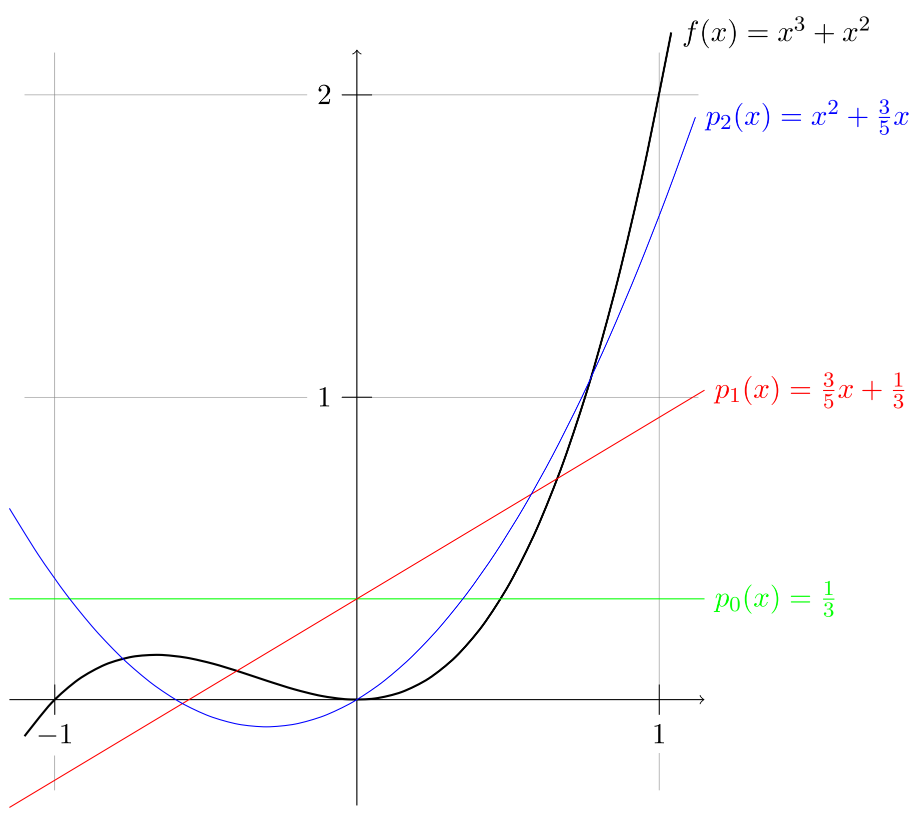
Wir erhalten die Orthogonalbasis $\mathscr{B} \coloneqq (1, x, x^2 - \frac{1}{3})$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

(c) Die orthogonale Projektion $p_i(x)$ von $f(x)$ auf den Unterraum $\mathbb{R}[x]_{\leq i}$ liefert denjenigen Punkt, der den Abstand minimiert. Wir berechnen die Projektionen mittels der in (b) bestimmen Orthogonalbasis $(b_0, \ldots, b_i)$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq i}$ für $i = 0, 1, 2$:

- $p_0(x) = \frac{\langle x^3+x^2,1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = \frac{0+\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$
- $p_1(x) = \frac{\langle x^3+x^2,1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle x^3+x^2,x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x = \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{5}+0}{\frac{2}{3}} \cdot x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$
- $\langle x^3 + x^2, x^2 - \frac{1}{3}\rangle = 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{45}$,
  $\|x^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \|x^2\|^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\langle x^2, 1\rangle + \frac{1}{9}\|1\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ p_2(x) &= \frac{\langle x^3 + x^2, 1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle x^3 + x^2, x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x + \frac{\langle x^3 + x^2, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|^2} \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \\
&= \frac{3}{5}x + \frac{1}{3} + \frac{\frac{8}{45}}{\frac{8}{45}} \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \\
&= x^2 + \frac{3}{5}x
\end{aligned}$$

(d) Graphen der Funktionen $f(x)$ und $p_i(x)$ für $i = 0, 1, 2$:



Aufgabe 17. (3 Punkte)

Bestimmen Sie eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts aus Eigenvektoren von

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 17:

Da A symmetrisch, also der zugehörige Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts ist, sind die Eigenräume automatisch zueinander orthogonal. Aus dem Satz über die Hauptachsentransformation folgt, dass jede symmetrische reelle Matrix diagonalisierbar ist. Wir bestimmen zuerst eine nicht notwendigerweise orthonormale Basis aus Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} X-4 & -2 \\ -2 & X-7 \end{pmatrix} = (X-4)(X-7) - (-2)^2 = X^2 - 11X + 24$$

und hat gemäß Mitternachtsformel die Nullstellen 3 und 8. Wir bestimmen Basen der zugehörigen Eigenräume V_λ für $\lambda = 3$ und $\lambda = 8$:

- $\lambda = 3$:

$$3 \cdot \mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rceil^{-2} \\ \hookleftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = t_2 \quad \text{Parameter},$$

$$-X_1 - 2X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -2X_2 = -2t_2$$

  Wähle $t_2 := 1$, dann ergibt sich für V_3 der Basisvektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 8$:

$$8 \cdot \mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{2} \ \rceil^{1} \\ \longleftarrow\!\lrcorner \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = t_2 \quad \text{Parameter},$$

$$2X_1 - X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{1}{2}X_2 = \frac{1}{2}t_2$$

  Wähle $t_2 := 2$, dann ergibt sich für V_8 der Basisvektor

$$v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Eigenräume in der Tat zueinander orthogonal sind, da $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ gilt. Wir müssen nur noch die beiden Basisvektoren normieren:

$$\tilde{v}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nun ist $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 18. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $p_W : V \to V$ die orthogonale Projektion auf einen Unterraum W von V. Zeigen Sie, dass für $v \in V$ in der Bessel'schen Ungleichung $\|p_W(v)\| \leq \|v\|$ genau dann Gleichheit gilt, wenn $v \in W$ ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 18:

Sei $(b_1, \ldots, b_r)$ eine ONB von W und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Ergänzung zu einer ONB von V. Dann gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i, \\ p_W(v) &= \sum_{i=1}^{r} \langle v, b_i \rangle b_i. \end{aligned}$$

Wie im Beweis der Bessel'schen Ungleichung gilt

$$\|p_W(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \langle v, b_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle^2 = \|v\|^2.$$

Die Ungleichung folgt aus $\sum_{i=r+1}^{n} \langle v, b_i \rangle^2 \geq 0$. Da alle Summanden ≥ 0 sind, gilt Gleichheit genau dann, wenn $\langle v, b_i \rangle = 0$ für alle $i = r+1, \ldots, n$ gilt, also wenn $v \in \langle b_1, \ldots, b_r \rangle_{\mathbb{R}} = W$ ist.

Aufgabe 19. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur der symmetrischen Bilinearform $(A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB)$ auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 3) in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 19:

Wir bestimmen die Gram'sche Matrix der Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Eine Basis besteht aus den Matrizen E_{rs} mit $1 \leq r, s \leq n$, die an einer Stelle (r, s) den Eintrag 1 und ansonsten Nullen enthalten, also

$$(E_{rs})_{ij} = \delta_{ri}\, \delta_{sj}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(E_{rs}\, E_{r's'}) &= \sum_{i=1}^{n} (E_{rs} E_{r's'})_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (E_{rs})_{ik} (E_{r's'})_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ri}\, \delta_{sk}\, \delta_{r'k}\, \delta_{s'i} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Summe ist nur dann ungleich Null, wenn $r = i = s'$ und $s = k = r'$ gilt. Daraus folgt

$$\mathrm{Sp}(E_{rs}\, E_{r's'}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (r, s) = (s', r'), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir die Basisvektoren wie folgt anordnen,

$$\mathscr{B} \coloneqq (E_{11}, \ldots, E_{nn},\ E_{12}, E_{21},\ E_{13}, E_{31}, \ldots, E_{n-1,n}, E_{n,n-1}),$$

dann hat die Gram'sche Matrix der Bilinearform bezüglich $\mathscr{B}$ also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ links oben hat die Signatur $(n, 0, 0)$. Jeder Block $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat die Signatur $(1, 1, 0)$, wie wir durch Bestimmung einer Diagonalform sehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl dieser Blöcke ist $\frac{n^2-n}{2}$, damit ergibt sich insgesamt die Signatur $(n_+, n_-, 0)$ mit

$$\begin{aligned} n_+ &= n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \\ n_- &= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **21. Mai 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786705/Geometrie`
