

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\{A \in \text{Mat}_n(K) \mid \forall B \in \text{Mat}_n(K) : AB = BA\} = \{k \cdot E_n \mid k \in K\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper.

- (a) Für $f, g: M \rightarrow K$ definieren wir $f + g: M \rightarrow K$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und für $k \in K$ definieren wir $k \cdot f: M \rightarrow K$ durch $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$.

Zeigen Sie, dass $\text{Abb}(M, K) := \{f: M \rightarrow K \text{ Abbildung}\}$ dadurch eine K -Vektorraumstruktur erhält.

- (b) Wir definieren

$$\text{Abb}^1(K) := \{f \text{ ist Auswertungsabbildung zu einem Polynom aus } [X]\} \subseteq \text{Abb}(K, K).$$

Für $f \in \text{Abb}(K, K)$ definieren wir nun die Skalarmultiplikation $k * f: K \rightarrow K$ durch $(k * f)(x) := f(kx)$.

Zeigen Sie, dass $\text{Abb}^1(K)$ mit Skalarmultiplikation $*$ ein Vektorraum ist, aber $\text{Abb}(K, K)$ mit Skalarmultiplikation $*$ *kein* Vektorraum wird.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Teilmengen um Untervektorräume handelt:

- (a) $A := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(b) $B := \{f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid f(1) \neq 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$;
(c) $C := \text{Abb}(M, \mathbb{Q}) \subseteq \text{Abb}(M, \mathbb{R})$ (als \mathbb{R} -Vektorraum);
(d) $D := \text{Abb}(M, \mathbb{Q}) \subseteq \text{Abb}(M, \mathbb{R})$ (als \mathbb{Q} -Vektorraum);
(e) $E := \{a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid a \text{ ist Nullfolge}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper. Für $x \in M$ sei

$$\delta_x: M \rightarrow K, \quad y \mapsto \delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche Mengen M ist $[\{\delta_x \mid x \in M\}] = \text{Abb}(M, K)$?

Zusatzaufgabe

Finden Sie die neun LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

O	R	K	B	B	E	E	D	D	J	Y	Z	S	S	P	C	S	U	J	A	G
U	P	G	F	J	L	J	X	M	M	H	N	L	U	E	Y	L	D	H	N	F
B	Z	W	S	Q	I	N	O	H	F	M	L	Q	M	W	O	E	E	O	T	V
I	D	T	C	I	U	J	B	L	S	X	D	H	M	F	T	W	I	C	A	M
P	F	B	E	T	A	K	H	H	P	E	F	N	E	Q	W	T	J	P	U	A
C	S	N	E	S	M	P	R	O	A	K	D	R	K	S	A	R	Y	I	O	A
E	V	L	A	U	E	L	F	O	N	Y	C	F	O	K	J	J	U	I	E	X
T	B	E	I	P	R	G	K	F	N	N	M	D	I	Q	N	I	D	I	Y	I
T	Y	A	Z	S	E	F	V	E	B	U	Q	L	H	V	C	U	H	J	K	H
I	R	U	G	M	A	Q	C	I	A	M	P	A	Z	L	I	T	M	K	O	Z
N	S	E	V	R	Y	D	L	R	T	I	G	H	N	H	S	Q	I	E	K	C
H	L	A	F	N	F	R	R	J	T	U	W	A	O	L	D	Z	V	N	N	T
C	B	J	B	A	C	O	B	L	S	R	B	X	L	E	L	U	T	Y	W	S
S	U	O	N	F	T	K	U	Q	J	I	E	I	A	G	R	U	O	R	V	P
H	S	B	N	K	I	M	O	I	D	D	N	F	R	W	E	Y	Z	E	R	N
C	C	J	E	U	R	Y	C	E	I	N	O	Q	D	T	O	B	V	T	D	G
R	C	V	I	A	H	F	L	P	W	Z	B	A	S	E	S	K	R	F	L	T
U	Q	Y	L	O	J	D	Q	P	O	Q	I	K	W	B	I	I	N	A	S	D
D	E	A	R	U	N	T	E	R	R	A	U	M	C	E	R	S	D	N	T	A
A	K	M	N	O	I	T	A	N	I	B	M	O	K	R	A	E	N	I	L	V
S	K	Z	O	I	Q	N	M	Z	D	S	B	J	J	I	K	O	Z	P	C	W

Abgabe bis 10:00 am Dienstag, den 11. Juni in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.