Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2019

Übungsblatt 2 4. Juni 2019

Aufgabe 5. (4 = 1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild der folgenden Gruppenhomomorphismen:

(a) $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times, \quad x \mapsto x^2$;

(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times, \quad n \mapsto i^n$;

(c) $\mathrm{Aff}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times, \quad aX + b \mapsto a$ (vgl. Aufgabe 2, Blatt 1);

(d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto 2a + 3b$.

Aufgabe 6. (4 = 1+1+1+1)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne $[a] \coloneqq a + n\mathbb{Z}$ die Restklasse von a in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto [a]$ der Restklassenhomomorphismus.

(a) Bestimmen Sie Kern und Bild von π.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, b ist ein Teiler von a (geschrieben $b \mid a$), wenn $a = kb$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Zeigen Sie: $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} \iff b \mid a$.

(c) Zeigen Sie, dass die Untergruppen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in Bijektion zu den Teilern von n in $\mathbb{N}$ stehen.

(d) Wie viele Untergruppen besitzt $\mathbb{Z}/2019\mathbb{Z}$?

Aufgabe 7. (4 = 2+2 Punkte)

(a) Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe und $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ eine endliche Teilmenge. Zeigen Sie:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \{m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n \; ; \; m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, die von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird. Zeigen Sie, dass A endlich ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 8. (4 = 2+2 Punkte)

Sei $\mathrm{Aff}^1(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Aff}^1(\mathbb{Q})$ die Untergruppe der Polynome $aX + b$ mit $a \in \{1, -1\}$ und $b \in \mathbb{Z}$ (vgl. Aufgabe 2, Blatt 1). Seien

$$u(X) := -X, \quad v(X) := -X + 1 \in \mathrm{Aff}^1(\mathbb{Z}).$$

(a) Bestimmen Sie die Ordnungen von u, v und $v \circ u$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}^1(\mathbb{Z})$ von u und v erzeugt wird.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **11. Juni 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/76786679/Grundlagen_der_Algebra`
